بسم الله الرحمن الرحیم

جبر و احتمال

سال سوم آموزش متوسطه

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری**

نام کتاب : **جبر و احتمال ـ ۲۵۸/۲**

مؤلفان : **دکتر بیژن ظهوری‌زنگنه، دکتر زهرا گویا، دکتر یحیی تابش و یداللّه ایلخانی‌پور**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**

تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱ ، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹ ،

وب‌سایت : **www.chap.sch.ir**

صفحه‌آرا : **خدیجه محمّدی**

طراح جلد : **دکتر زهرا گویا، محمّدقاسم علیمردانی**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (دارو پخش)**

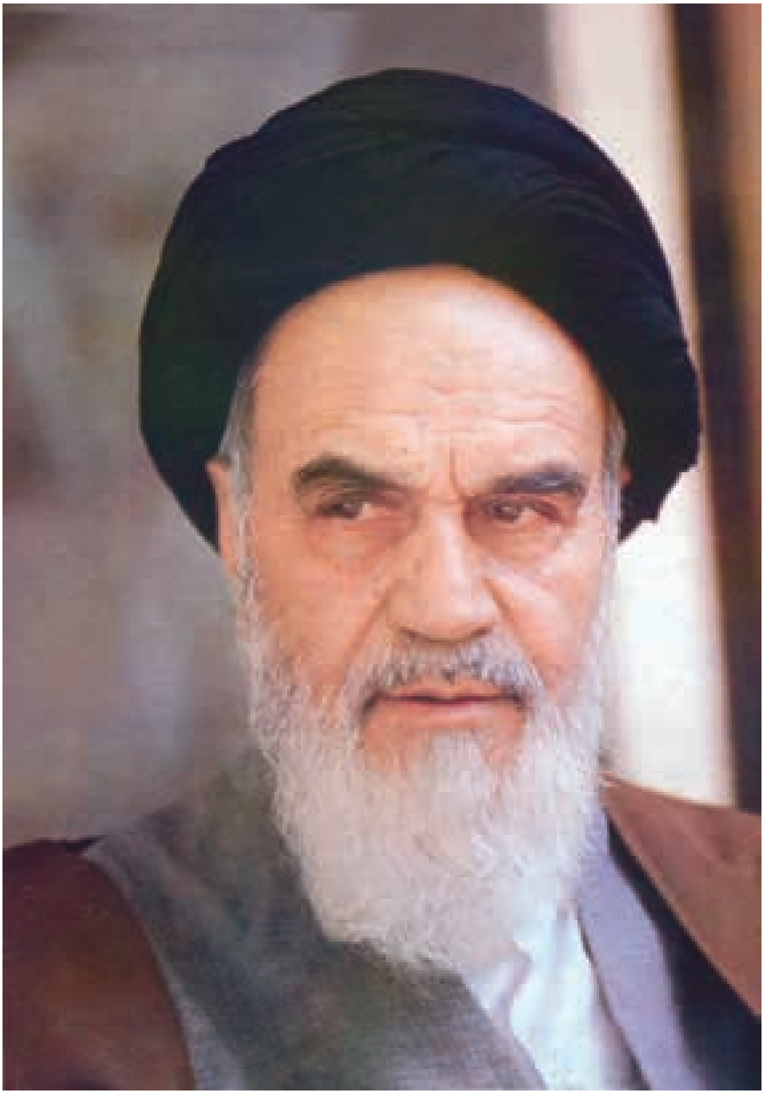
تلفن : ۵ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار : **۱۳۹۲**

ISBN 964-05-0055-0 شابک ۰-۵۵-۰۰۵-۹۶۴

۱۳۹۲



اگر منحرفین و معوجین در یک کشوری سرنوشت آن کشور را به دست بگیرند، آن کشور رو به انحطاط و انحراف می‌رود، و اگر افاضل و دانشمندان که با فضیلت هستند، با فضیلت انسانی هستند، این‌ها سررشته‌دار یک کشور بشوند، فضیلت در آن کشور زیاد می‌شود؛ برای این‌که در آن مقامی که هستند مردم به حسب عادت توجه به آن‌ها دارند و حرف‌های آن‌ها در ذهن‌های آن‌ها، در ذهن‌های عموم مردم کارگر است و تأثیر می‌کند.

امام خمینی

این کتاب در سال ۱۳۷۹ براساس هدف‌های آموزشی ریاضی و مطابق با ریزبرنامه تهیه و تصویب‌شده در شورای برنامه‌ریزی ریاضی متوسطه در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی توسط آقای دکتر بیژن ظهوری‌زنگنه و خانم دکتر حمیده داریوش‌همدانی و خانم سهیلا غلام‌آزاد مورد تجدید نظر کلی قرار گرفت.

فهرست مطالب

پیشگفتار

حکایتی دربارهٔ یکی از ریاضیدان‌های مشهور می‌گویند که خالی از لطف نیست : روزی قرار بود که این ریاضیدان در حضور جمع تحصیلکرده‌ای سخنرانی کند. او در شروع صحبت یک عبارت ریاضی روی تخته نوشت و گفت : «در واقع این عبارت بدیهی است». ریاضیدان دوباره به عبارت نوشته شده نگاه کرد و گفت : «حداقل من فکر می‌کنم که بدیهی است ». امّا همچنان‌که شکّ او قوی‌تر می‌شد گفت : «ببخشید » و کاغذ و مدادی برگرفت و سالن سخنرانی را ترک کرد. بعد از بیست دقیقه اوخندان به سالن بازگشت و پیروزمندانه گفت : «بله حضار محترم، این عبارت بدیهی است!»

به نظرمی‌رسدکه منظوراین ریاضیدان از بدیهی بودن عبارت آن بود که ما می‌توانیم به‌طور شهودی درستی آن را قبول کنیم. با این حال این پذیرش کافی نیست و در نهایت، تجزیه و تحلیل منطقی، آن‌را تأیید و یا رد می‌کند. بنا به گفتهٔ اسکمپ[۱] (۱۹۷۱) «مطمئن بودن از چیزی یک قصّه است و دانستن این‌که **چرا** آن چیز درست است قصّه‌ای دیگر» و هدف ما نیز کمک به دانستن این **چراهاست.**

با درنظر گرفتن نقشی که ریاضیّات در تربیت هر شهروند می‌تواند ایفا کند، آشنایی با قسمت‌های مختلف این علم برای نوجوانان مستعد، متفکّر و توانای ما الزامی به نظر می‌رسد. نمونه‌های شهودی و تجربی زیبایی در رابطه با رشد و توسعهٔ مطالب مطرح شده در این کتاب وجود دارند که یادگیری و فهم آن‌ها را آسان می‌کنند. امّا برای بهتر فهمیدن و یادگرفتن موضوعات یاد شده، به دانش‌های پیش نیاز و ابزار مختلفی نیازمندیم. مهمترین آن‌ها **نحوهٔ استدلال کردن** و سپس تکمیل آنچه که دربارهٔ مجموعه‌ها و بالاخره حاصلضرب دکارتی و رابطه یاد گرفته‌ایم

۱ــ Skemp

می‌باشد.

نیاز به دانش‌های پیش نیاز ما را بر آن داشت که دو فصل اوّل کتاب را به مفاهیم فوق اختصاص دهیم تا علاوه‌بر تعمیق یادگیری‌های قبلی، زمینهٔ مناسب‌تری برای بهتر فهمیدن مطالب فصل‌های بعد فراهم آید.

هم‌چنین، توجه معلّمان گرامی و دانش‌آموزان عزیز را به این مهم جلب می‌کنیم که تجدید نظر کتاب پس از جمع‌آوری و تجزیه و تحلیل نتایج حاصل از ۴ سال تدریس آن صورت گرفته است. از حضور شما و تمامی صاحبنظران گرامی خواهشمندیم که با پیشنهادها و انتقادهای سازندهٔ خویش ما را در تصحیح، توسعه و تکمیل آن یاری دهند.

مؤلفان



فصل ۱

استدلال ریاضی

۱ــ۱ــ درک شهودی[۱]

طی قرن‌های متمادی، مردم باور کرده بودند که زمین صاف است و ستاره‌ها به‌دور آن در گردش هستند. آن‌ها نظریهٔ گردبودن زمین و چرخش آن به دور خورشید را رد می‌کردند. اگر چه امروزه این نظریه حتّی برای خردسالان نیز امری کم و بیش واضح است، لیکن با شهودِ مردم آن زمان مطابقت نداشت.

شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد.

وقتی که از شهود خود استفاده می‌کنیم، هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان صد درصد بگوییم که نتیجه‌گیری ما درست است. با این حال در بسیاری مواقع، درک شهودی به ما کمک می‌کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس‌های بهتری برای اثبات قسمت‌های مختلف بزنیم. چنین حدس‌هایی کم و بیش محتمل و به‌صورت استدلال موقّت، رضایتی در ما به وجود می‌آورند که با اشتیاق بیشتری برای دستیابی به یک استدلال حتمی تلاش کنیم. معمولاً استدلال موقّت بر مبنای تمثیل و استقرا می‌باشد که در قسمت‌های بعد با محدودیت‌های آن‌ها آشنا می‌شویم.

۱ــ۲ــ استدلال تمثیلی یا قیاسی[۲]

در اکثر کارهای روزمرّه ــ از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیّت‌های عمدهٔ علمی و یا کارهای هنری ــ از تمثیل یا قیاس استفاده می‌کنیم. قیاس که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد، در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است. انواع تمثیل با توجّه به محدودیّت‌هایی که دارند، می‌توانند در ایجاد یک زمینهٔ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی

۱ــ Intuitive ۲ــ Analogy

کمک مؤثّری باشند و نباید اهمیّت آن‌ها را نادیده گرفت. به مثال زیر توجّه کنید :

مثال ۱ : از تمثیل برای درک بهتر این حقیقت که حاصلضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی مثبت است استفاده می‌کنیم :

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفی (−) درنظر می‌گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلوبردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن‌را عملی منفی (−) به حساب می‌آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (−) و فیلم را به عقب برگردانیم (−)، آب دوباره به مخزن باز می گردد (+)! یعنی حاصل دو عمل منفی (خروج آب و عقب بردن فیلم)، عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

همان‌طور که می‌دانید، مثال بالا به هیچ عنوان یک اثبات ریاضی نیست، امّا تمثیل خوبی است تا ما را برای اثبات دقیق آماده کند.

تمرین ۱ــ با توجه به داستان زیر، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کار برد و علت خندهٔ مردم چه بود؟

بود بقالی و وی را طوطیی — خوش‌نوایی سبز گویا طوطیی
در دکان بودی نگهبان دکان — نکته گفتی با همه سوداگران
در خطاب آدمی ناطق بدی — در نوای طوطیان حاذق بدی
جست از سوی دکان سویی گریخت — شیشه‌های روغن گل را بریخت
از سوی خانه بیامد خواجه‌اش — بر دکان بنشست فارغ خواجه‌وش
دید پر روغن دکان و جامه چرب — بر سرش زد گشت طوطی کَل ز ضرب
روزکی چندی سخن کوتاه کرد — مرد بقال از ندامت آه کرد
ریش برمی‌کند و می‌گفت ای دریغ — کآفتاب نعمتم شد زیر میغ
دست من بشکسته بودی آن‌زمان — چون زدم من بر سر آن خوش‌زبان
هدیه‌ها می‌داد هر درویش را — تا بیابد نطق مرغ خویش را
بعد سه روز و سه شب حیران و زار — بر دکان بنشسته بُد نومیدوار
می‌نمود آن مرغ را هرگون شگفت — تا که باشد کاندر آید او بگفت
جولقی سر برهنه می‌گذشت — با سر بی مو چو پشت طاس و طشت
طوطی اندر گفت آمد در زمان — بانگ بر درویش زد که هی فلان
از چه‌ای کل با کلان آمیختی — تو مگر از شیشه روغن ریختی

از قیاسش خنده آمد خلق را / کو چو خود پنداشت صاحب دلق را
کار پاکان‌را قیاس از خود مگیر / گرچه ماند در نبشتن شیر و شیر
جمله عالم زین سبب گمراه شد / کم کسی ز ابدال حق آگاه شد

۱ــ۳ــ استدلال استقرایی[۱]

اگر وارد قریه‌ای شوید و اوّلین فردی که به او برخورد می‌کنید دارای چشمانی آبی باشد چه می‌گویید؟ حال اگر به گردش در کوچه پس کوچه‌های قریه بپردازید و متوجّه شوید که رنگ چشمان تمام افرادی که با آن‌ها در آن قریه مواجه شده‌اید آبی است، ممکن است نتیجه بگیرید که **رنگ چشمان تمامی افراد قریه آبی است**.

در سفر به قریه، شواهد متعدّدی را جمع‌آوری کردیم، متوجّه یکسان بودن نتایج شدیم و براساس آن‌ها، نتیجه‌گیری کلّی را انجام دادیم. عالمان تجربی نیز با روشی مشابه مشاهدات خود را نظم داده و با توجه به نظم حاکم بر آن‌ها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربی به این نوع استدلال، **روش تجربی یا علمی** و در ریاضی به آن **استدلال استقرایی** گفته می‌شود.

استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلّی بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات است.

مثال ۲: فرض کنید که اعداد متوالی فرد را با هم جمع می‌کنیم. برای این کار از ۱ شروع می‌کنیم :

$$۱+۳=۴$$

$$۱+۳+۵=۹$$

$$۱+۳+۵+۷=۱۶$$

با توجّه به مشاهدات بالا نتیجه می‌گیریم **تمام حاصل جمع‌ها مربع کامل هستند.**

حال با ادامهٔ الگوی بالا، نتیجهٔ به‌دست‌آمده را کنترل می‌کنیم.

از این یافته‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ آیا می‌توان ادّعا کرد که **همیشه** حاصل جمع اعداد فرد متوالی یک مربع کامل است؟

۱ــ Inductive reasoning

۱ـ۴ـ محدودیت استدلال استقرایی

مشاهدهٔ ۱ـ آب آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهدهٔ ۲ـ برف آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهدهٔ ۳ـ یخ آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.

نتیجه: هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند.



در شکل بالا مرد غارنشین با مشاهده و جمع‌آوری اطّلاعات و دیدن الگویی که تکرار می‌شد نتیجه‌گیری کرد که «هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن‌که چیزی از آن باقی نماند!»

همان‌طور که می‌بینید، شکل بالا ضعف اساسی چنین استدلالی را به ما نشان می‌دهد زیرا که همیشه این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف بشوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلّی، بر مبنای مجموعهٔ محدودی از مشاهدات را نشان دهند.

تمرین ۲ـ محاسبات تعیین شده را انجام دهید تا اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند پیدا کنید :

۱) ۱×۸+۱= ☐

۲) ۱۲×۸+۲= ☐

۳) ۱۲۳×۸+۳= ☐

۴) ۱۲۳۴×۸+۴= ☐

الف) آیا فکر می‌کنید این الگو تا بینهایت ادامه داشته باشد؟

ب) بدون محاسبه و با توجّه به الگوی بالا، اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند حدس بزنید :

۵) $۱۲۳۴۵ \times ۸ + ۵ = \square$

۶) $۱۲۳۴۵۶ \times ۸ + ۶ = \square$

پ) نتایج قسمت (ب) را محاسبه کنید تا مشخّص شود که آیا حدس شما درست بوده است یا خیر؟

سعی کنید آنچه را شهودی به‌نظر می‌رسد، به‌طور رسمی و دقیق اثبات کنید و آنچه را که به طور رسمی و دقیق اثبات کرده‌اید به طور شهودی درک کنید. این یک ورزش مغزی جالب است.

جورج پولیا[۱]، ۱۹۴۵

۱ــ ۵ــ استقرای ریاضی[۲]

ممکن است به‌طور تصادفی مشاهده کرده باشید که : $۱+۸+۲۷+۶۴=۱۰۰$. با تشخیص مربع‌ها و مکعب‌های اعداد، شاید بتوانیم به مشاهدهٔ خود شکل جالب‌تری بدهیم :

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳=۱۰^۲$$

چطور این اتّفاق افتاد؟ آیا همیشه مجموع مکعب‌های متوالی، مربع یک عدد است؟ برای پاسخ به کنجکاوی خود، می‌توانیم موارد مشخّص دیگری را نیز بررسی کنیم و برای تکامل و یگانگی حالت $n=۱$، یعنی حالتی که فقط یک عدد مکعب شده وجود دارد، را نیز اضافه می‌کنیم :

مربع مجموع	مجموع مکعب‌ها	مکعب‌های اعداد متوالی
$۱^۲$	۱	$۱^۳$
$۳^۲$	۹	$۱^۳+۲^۳$
$۶^۲$	۳۶	$۱^۳+۲^۳+۳^۳$
$۱۰^۲$	۱۰۰	$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳$
$۱۵^۲$	۲۲۵	$۱^۳+۲^۳+۳^۳+۴^۳+۵^۳$

۱ــ George Polya

۲ــ برگرفته از کتاب ?How to solve it اثر جورج پولیا.

با جمع‌آوری مشاهدات فوق و استفاده از استدلال استقرایی می‌بینیم که :

مجموع مکعب‌های اعداد متوالی برابر است با مربع مجموع آن‌ها. امّا چنین نتیجه‌گیری‌ای کامل نیست. به همین دلیل است که در ریاضی استقرا را نه فقط با مشاهدات بلکه به‌کمک **اثبات دقیق** نیز محک می‌زنیم. حال برای اثبات دقیق به‌طریق زیر عمل می‌کنیم :

شاید بدانیم که $۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$. (اثبات کنید!) می‌خواهیم تحقیق کنیم و ببینیم که اگر مجموع مکعب‌های n عدد متوالی برابر با مربع مجموع آن‌ها باشد

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳=\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲ \qquad (۱)$$

آیا این ادّعا برای n+۱ عدد متوالی نیز درست است؟ یعنی آیا رابطهٔ

$$۱^۳+۲^۳+۳^۳+...+n^۳+(n+۱)^۳=\left[\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\right]^۲ \qquad (۲)$$

نیز برقرار است؟

با یک کنترل ساده، رابطهٔ زیر را با کم کردن (۱) از (۲) به‌دست می‌آوریم :

$$(n+۱)^۳=\left[\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\right]^۲-\left[\frac{n(n+۱)}{۲}\right]^۲ \qquad (۳)$$

از جملهٔ مشترک $\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲$ فاکتور می‌گیریم :

$$(n+۱)^۳=\left(\frac{n+۱}{۲}\right)^۲\left[(n+۲)^۲-n^۲\right] \qquad (۴)$$

$$=\frac{(n+۱)^۲}{۴}\left[n^۲+۴n+۴-n^۲\right] \qquad (۵)$$

$$=\frac{(n+۱)^۲}{۴}[۴n+۴] \qquad (۶)$$

$$=\frac{(n+۱)^۲}{۴}(n+۱)\times ۴ \qquad (۷)$$

$$=(n+۱)^۳ \qquad (۸)$$

رابطهٔ تجربی ما امتحان حیاتی را گذراند، یعنی درستی تساوی (۳) را نتیجه گرفتیم که معادل

تساوی (۲) است، یعنی

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \dots + n^۳ + (n+۱)^۳ = \left[\frac{(n+۱)(n+۲)}{۲}\right]^۲ \qquad (۹)$$

در بررسی این موضوع، درستی ادّعا را در حالت‌های خاص از $n = ۱$ تا $n = ۵$ مشاهده کردیم. سپس با فرضی که این ادّعا برای nاُمین حالت درست است، نشان دادیم که برای (n+۱) اُمین حالت نیز چنین ادّعایی درست است. حال با اطمینان خاطر می‌گوییم :

مجموع مکعب‌های n عدد متوالی، برابر با مربع مجموع آن‌هاست.

مطلب فوق نمونهٔ خوبی برای گذار از استدلال استقرایی (تجربی) به **استقرای ریاضی** است. برای بهتر فهمیدن استقرای ریاضی به مثال زیر توجّه کنید :

مثال ۳: برای هر عدد صحیح و مثبت n ثابت کنید که :

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \dots + \frac{۱}{۲^n} = ۱ - \frac{۱}{۲^n} \qquad (۱)$$

حل: اگر $n = ۱$ ، آنگاه :

$$\frac{۱}{۲^۱} = \frac{۱}{۲} = ۱ - \frac{۱}{۲^۱} \qquad (۲)$$

می‌بینیم که در این حالت، تساوی (۱) درست است.

اگر $n = ۲$ ، آنگاه

$$\frac{۱}{۲^۱} + \frac{۱}{۲^۲} = \frac{۳}{۴} = ۱ - \frac{۱}{۲^۲} \qquad (۳)$$

که مجدداً تساوی (۱) را نشان می‌دهد. این تساوی را می‌توانیم با جمع (۲) و $\frac{۱}{۲^۲}$ به‌دست آوریم :

$$\left(۱ - \frac{۱}{۲^۱}\right) + \frac{۱}{۲^۲} = \frac{۳}{۲^۲} = ۱ - \frac{۱}{۲^۲}$$

ادامهٔ این بررسی برای تمام اعداد عملی نیست، پس چه کار کنیم؟

یک قدم دیگر هم جلو می‌رویم و با استفاده از نتایج به‌دست‌آمده برای دو جملهٔ اوّل، حالت $n = ۳$ را نیز بررسی می‌کنیم :

$$\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲}\right) + \frac{۱}{۲^۳} = \left(۱ - \frac{۱}{۲^۲}\right) + \frac{۱}{۲^۳} = \frac{۷}{۲^۳} = ۱ - \frac{۱}{۲^۳} \qquad (۴)$$

درنتیجه درستی رابطه برای حالت $n = ۳$ را نیز نتیجه گرفتیم.

حال اگر درحالت کلّی، درستی رابطه را برای $n=k$ فرض کنیم، یعنی داشته باشیم

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\ \dots\ +\frac{۱}{۲^k}=۱-\frac{۱}{۲^k}$$

و بتوانیم از این فرض، درستی رابطه را برای $n=k+۱$ یعنی

$$\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}+\ \dots\ +\frac{۱}{۲^k}\right)+\frac{۱}{۲^{k+۱}}=۱-\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۵)$$

نتیجه بگیریم، آنگاه می‌توانیم ادّعا کنیم که تساوی (۱) در هر حالتی درست است.

در طرف اوّل تساوی (۵) به جای مقدار داخل پرانتز، معادل آن یعنی $\left(۱-\frac{۱}{۲^k}\right)$ را از تساوی(۱) جایگزین می‌کنیم

$$\left(۱-\frac{۱}{۲^k}\right)+\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۶)$$

$$=۱-\frac{۲}{۲^{k+۱}}+\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۷)$$

$$=۱-\frac{۱}{۲^{k+۱}} \qquad (۸)$$

از درستی رابطه در حالت $n=k$ ، درستیِ آن در حالت $n=k+۱$ نیز ثابت شد. این‌گونه اثبات را، اثبات به‌وسیلهٔ **استقرای ریاضی** یا اثبات به‌وسیلهٔ **اصل استقرا** می‌نامیم که از اهمیّت ویژه‌ای در ریاضیّات برخوردار است. اصل استقرا برای اثبات رابطه‌هایی نظیر رابطهٔ بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل استقرا

فرض کنید $P(n)$ حکمی دربارهٔ عددطبیعی n باشد. اگر $P(۱)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ ، درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است.

درنتیجه بنابراصل استقرا، برای هر عدد طبیعی n، تساوی (۱) در مثال قبل، درست است.

برای استفاده از اصل استقرا گام‌های زیر را برداشتیم :

گام ۱: درستی حکم را برای $n=۱$ نشان دادیم.

گام ۲: ثابت کردیم که اگر حکم برای $n=k$ درست باشد، آنگاه برای $n=k+۱$ نیز درست است.

مثال ۴: با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n، $۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است.

حل: با دانستن این که $P_n = ۴^{۲n}-۱$ بر ۵ بخش‌پذیر است، گام اوّل را برمی‌داریم.

گام ۱: درستی حکم را برای $n=۱$ نشان می‌دهیم:

$$P_۱ = ۴^{۲(۱)} - ۱ = ۱۵ = ۵\times ۳ \qquad (۱)$$

که بر ۵ بخش‌پذیر است پس P (۱) درست است.

گام ۲: می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر حکم برای P(k) درست باشد، درنتیجه برای P(k+۱) نیز درست است.

فرض کنیم:

$$P_k = ۴^{۲k} - ۱ = ۵r \qquad (۲)$$

که بر ۵ بخش‌پذیر است. حال باید بخش‌پذیر بودن

$$P_{k+۱} = ۴^{۲(k+۱)} - ۱ \qquad (۳)$$

بر ۵ را نشان دهیم. برای این کار، طرفین تساوی (۲) را در $۴^۲$ ضرب می‌کنیم یعنی

$$۴^۲(۴^{۲k} - ۱) = ۴^۲(۵r)$$

از ساده‌کردن (۳)، تساوی (۴) به‌دست می‌آید:

$$۴^{۲k+۲} - ۴^۲ = ۴^۲(۵r) \qquad (۴)$$

با اضافه‌کردن ۱۵ به طرفین تساوی خواهیم داشت:

$$۴^{۲(k+۱)} - ۱ = ۱۵ + ۴^۲(۵r) \qquad (۵)$$

$$= ۱۵ + ۱۶(۵r) \qquad (۶)$$

$$= ۵(۳ + ۱۶r) \qquad (۷)$$

تساوی (۷) بخش‌پذیر بودن P(k+۱) بر ۵ را نشان می‌دهد. یعنی از P(k)، درستی P(k+۱) را نتیجه گرفتیم. در این صورت بنابر اصل استقرا، P(n) برای هر عدد صحیح و مثبت n نیز درست است.

در حالت کلی، از گام‌های ۱ و ۲ نتایج زیر را به‌دست می‌آوریم:

P(۱)، P(۲) را نتیجه می‌دهد.

P(۲)، P(۳) را نتیجه می‌دهد.

P(۳)، P(۴) را نتیجه می‌دهد.

و الی آخر که این توجیه کنندهٔ درست بودن حکم P(n) برای هر عدد طبیعی n است.

۱ـ۶ـ استقرای تعمیم‌یافته

در مثال‌هایی که تاکنون دیدیم، استقرای ریاضی را از $n=۱$ شروع کردیم، یعنی درستی حکم مورد نظر را برای $n=۱$ نشان دادیم. امّا گاهی لازم است که اوّلین مرحلهٔ استقرا را از یک عدد طبیعی $n>۱$ آغاز کنیم. به مثال زیر توجّه کنید:

مثال ۵: ثابت کنید عدد طبیعی مناسبی مانند $m>۱$ وجود دارد به طوری‌که برای هر عدد طبیعی n $(n \geq m)$ داریم

$$n! > ۳^n \qquad (۱)$$

حل: ابتدا با اندکی جستجو، تحقیق می‌کنیم که n چه اندازه باید بزرگ باشد؟

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰	۴۰۳۲۰
۳^n	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷	۶۵۶۱

می‌بینیم که برای nهای طبیعی کوچکتر از ۷، اصلاً چنین حکمی درست نیست. امّا برای $n=۷$، رابطهٔ $n! > ۳^n$ درست است و به نظر می‌رسد که برای nهای بزرگتر از ۷ نیز حکم درست باشد. حال فرض می‌کنیم برای $k \geq ۷$ حکم درست باشد یعنی: $k! > ۳^k$. آنگاه درستی حکم زیر را تحقیق می‌کنیم:

$$(k+۱)! > ۳^{k+۱} \qquad (۲)$$

برای نشان‌دادن (۲) طرفین $k! > ۳^k$ را در $(k+۱)$ ضرب می‌کنیم:

$$(k+۱)k! > (k+۱)۳^k \qquad (۳)$$

و چون $k \geq ۷$ فرض شده است، پس:

$$(k+۱)k! > ۷ \times ۳^k \qquad (۴)$$

با این حال می‌بینیم که طرفین نامساوی (۴) چنین خاصیتی را دارد که:

$$۷ \times ۳^k > ۳ \times ۳^k = ۳^{k+۱} \qquad (۵)$$

پس:

$$۷ \times ۳^k > ۳^{k+۱} \qquad (۶)$$

درنتیجه طبق (۴) و (۶):

$$(k+۱)k! > ۳^{k+۱} \qquad (۷)$$

اما طبق تعریف:

$$(k+۱)k! = (k+۱)! \qquad (۸)$$

که معادل آن‌را در (۷) قرار می‌دهیم درنتیجه:

$$(k+۱)! > ۳^{k+۱} \qquad (۹)$$

بدین ترتیب برای $k \geq ۷$ ، نشان دادیم که اگر $k! > ۳^k$ ، آنگاه $(k+۱)! > ۳^{k+۱}$. حال با اطمینان می‌توانیم بگوییم که برای هر $n \geq ۷$ داریم $n! > ۳^n$.

در این مثال مشاهده شد m مناسب ۷ است که به روش جستجو آن‌را به دست آوردیم.

چنین شیوهٔ استدلالی را روش **استقرای تعمیم‌یافته** می‌گویند.

اصل استقرای تعمیم‌یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی دربارهٔ عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m > ۱$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+۱)$ نتیجه شود، آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است. (دقّت کنید که در هرمسأله‌ای باید m مناسب را پیدا کرد.)

برای استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته، گام‌های زیر را برمی‌داریم :

گام ۱: m مناسب را به‌دست می‌آوریم،

گام ۲: درستی حکم را برای $n = m$ نشان می‌دهیم،

گام ۳: ثابت می‌کنیم که اگر حکم برای $n = k \geq m$ درست باشد، آنگاه حکم برای $n = k+۱$ نیز درست است.

آنگاه نتیجه می‌شود که حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.



تمرین

۱ــ برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید :

الف) $۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$

ب) $۲ + ۶ + ۱۰ + \ldots + (۴n-۲) = ۲n^۲$

پ) $۱ + ۳ + ۵ + \ldots + (۲n-۱) = n^۲$

ت) $۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n < \frac{۱}{۸}(۲n+۱)^۲$

ث) $۱\times۲ + ۲\times۳ + ۳\times۴ + \ldots + n(n+۱) = \frac{n(n+۱)(n+۲)}{۳}$

۲ــ اگر $r \neq ۱$ ، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید :

$$۱ + r + r^{۲} + \ \dots \ + r^{n} = \frac{۱ - r^{n+۱}}{۱ - r}$$

۳ــ در هر یک از بندهای زیر ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید و سپس حکم را برای هر عدد طبیعی $(n \geq m)n$ ثابت کنید.

الف) $۲^{n} > n^{۲}$

ب) $۲^{n} < n!$

پ) $۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۷} + \ \dots \ + \frac{۱}{۲^{n} - ۱} < \frac{n}{۲}$

۴ــ مجموع جملات زیر را حدس بزنید و ادعای خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید :

$$\frac{۱}{۱ \times ۲} + \frac{۱}{۲ \times ۳} + \frac{۱}{۳ \times ۴} + \ \dots \ + \frac{۱}{n(n+۱)}$$

۵ــ با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید :

الف) تعداد قطرهای هر n ضلعی محدّب برابر است با $\frac{n(n-۳)}{۲}$.

ب) مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدّب برابر است با $(۲n - ۴) \times ۹۰^{\circ}$.

۶ــ ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n، $۸^{n} - ۱$ بر ۷ بخش‌پذیر است.

۷ــ اگر $a \geq -۱$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید :

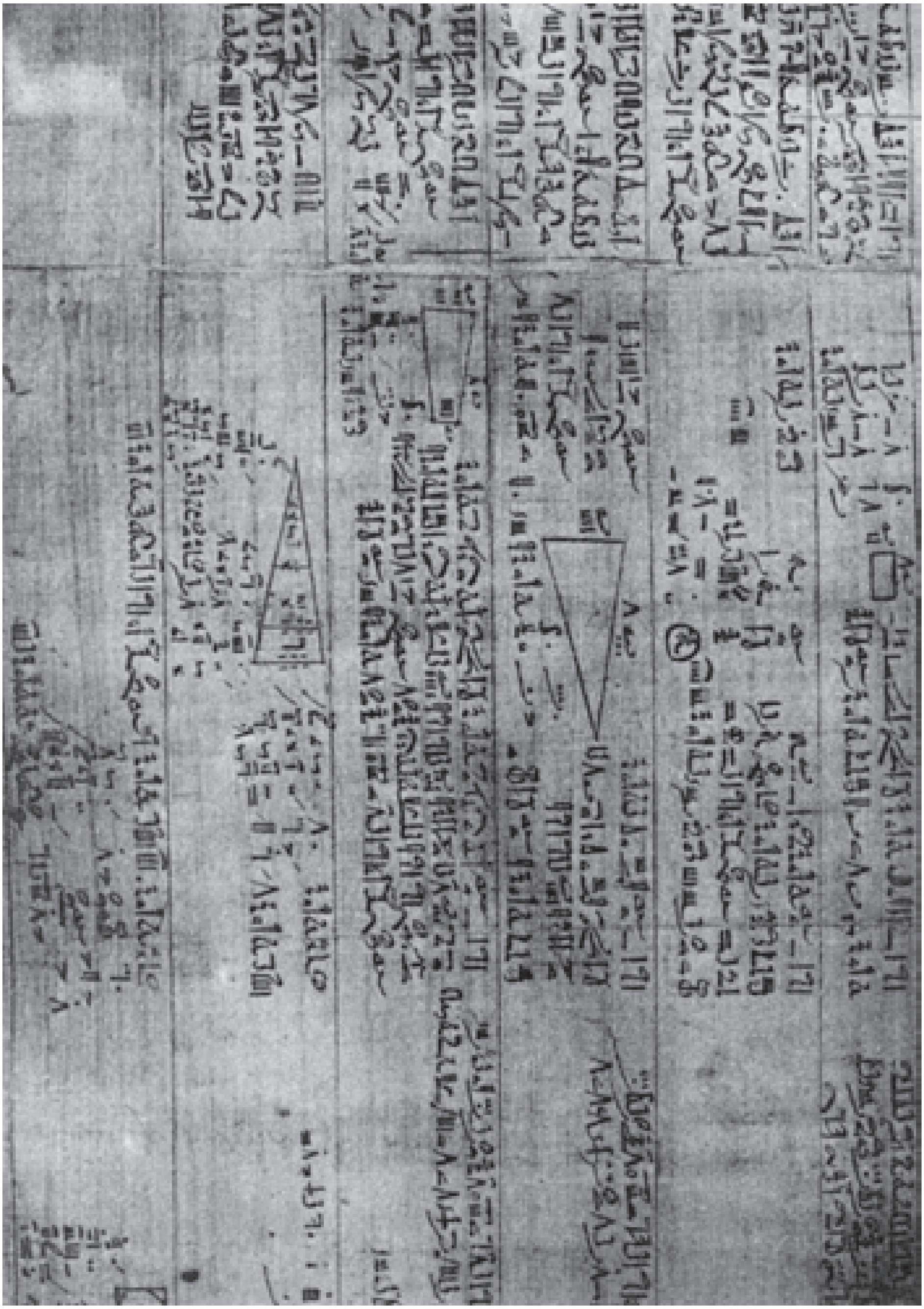
$$(۱ + a)^{n} \geq ۱ + na$$

۸ــ نامساوی مثلث برای هر دو عدد حقیقی a و b به‌صورت $|a + b| \leq |a| + |b|$ برقرار است. با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر n عدد حقیقی $x_{۱}$ ، $x_{۲}$ ، … ، x_{n} داریم :

$$|x_{۱} + x_{۲} + \ \dots \ + x_{n}| \leq |x_{۱}| + |x_{۲}| + \ \dots \ + |x_{n}|$$

مجلهٔ ریاضی

*از زمان‌های قدیم، ایده‌های استقرا وجود داشته، از آن استفاده می‌شده است. با این حال، اثبات به کمک استقرا از اوایل قرن شانزدهم میلادی متداول شده است و توسط بعضی از ریاضیدانان اروپایی مورد استفاده قرار گرفته است. در قرن هفدهم **فرما** ریاضیدان مشهور،استفاده از استقرا را با تنوع بیشتری مطرح ساخت. ولی اصطلاح «استقرای ریاضی» در اوایل قرن نوزدهم توسط **دِمُرگان**، ریاضیدان انگلیسی، به کار رفت و روش استقرا در اثبات‌های ریاضی به‌طور مدون مورد استفاده قرار گرفت.*



در طول تاریخ، مردم از علامت‌ها و نشانه‌های مختلفی برای نمایش اعداد استفاده کرده‌اند. بعضی از این نشانه‌ها در پاپیروس رایند دیده می‌شوند. ریاضیدان‌ها هنوز به مطالعه و یادگیری بیشتر در مورد اعداد مشغولند.

۱ـ۷ـ استدلال استنتاجی[1]

در مقدمهٔ پاپیروس رایند که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد (۱۶۵۰ سال قبل از میلاد) چنین آمده است :
«به‌جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخّصهٔ شعور انسان که نشان‌دهندهٔ درجهٔ تمدن هر ملّت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلّی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملّت به نمایش گذاشته شود.»

یکی از مسایلی که در تاریخ ریاضی مصر ــ پاپیروس رایند ــ موجود است یک سرگرمی به‌صورت بازی با اعداد است. با توجّه به دستورالعمل‌های مسأله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌شود. در پایان بدون درنظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است!

مثال ۱ : این مثال از نوع سرگرمی با اعداد است. هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عدد انتخابی و تصادفی در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده‌است.

یک عدد انتخاب کنید	۴	۷	۱۲	۳۵
به آن ۵ را اضافه کنید	۹	۱۲	۱۷	۴۰
نتیجه را دوبرابر کنید	۱۸	۲۴	۳۴	۸۰
از آن ۴ را کم کنید	۱۴	۲۰	۳۰	۷۶
حاصل را بر ۲ تقسیم کنید	۷	۱۰	۱۵	۳۸
عددی را که ازابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجهٔ تقسیم کم کنید	۳	۳	۳	۳

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۳ است.

اگرچه با استدلال استقرایی می‌توان استدلال کرد که این نتیجه **شاید** برای همهٔ اعداد درست باشد، امّا به هر حال برای اثبات کلّی این مطلب، یعنی، **تبدیل شاید به باید**، به استدلال استنتاجی نیازمندیم.

مثال ۲ : همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند عدد

۱ــ Deductive reasoning

مشخص در موقع شروع از علامتگذاری استفاده می‌کنیم. در طول بازی، **مربّع کوچک** معرّف عدد انتخابی اوّلیه است و برای هر بار افزودن یا کاستن اعداد جدید،از یک دایرهٔ کوچک استفاده می‌کنیم.

عدد انتخابی	[illegible]
عدد انتخابی به‌اضافهٔ ۵	[illegible]
دوبرابر نتیجهٔ قبل	[illegible] [illegible]
کم کردن ۴ واحد	[illegible] [illegible]
نصف نتیجه قبل	[illegible]
کم کردن عدد اولیّه	[illegible]

به این ترتیب ثابت کردیم که نتیجه همیشه ۳ است. حال به وضوح می‌بینیم که عدد انتخابی اوّلیه هرچه که باشد، باز هم نتیجه ۳ است!

شاید مربع‌ها و دایره‌ها نمادهای جالبی برای استفادهٔ همیشگی نباشند. در ریاضیّات معمولاً از **حروف** برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می‌کنیم.

مثال ۳: حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده از **حرف** برای عدد انتخابی اوّلیه، دوباره بررسی می‌کنیم:

عدد انتخابی	**n**
عدد انتخابی به‌اضافه ۵	$n+5$
دو برابر نتیجه قبل	$2n+10$
کم کردن ۴واحد	$2n+6$
نصف نتیجه قبل	$n+3$
کم کردن عدد اولیه	۳

نکته‌ای که در هر سه مثال به چشم می‌خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آن‌ها را قبول کرده‌ایم به‌دست آوردیم. یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

استدلال استنتاجی روش نتیجه‌گیری با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

مثال‌های فراوانی از دنیای اطراف ما وجود دارند که نشان‌دهندهٔ استفاده از استدلال استنتاجی در زندگی روزمرّه هستند.

مثال ۴: رستورانی برای جلب مشتری و فروش بیشتر، اعلام کرده است که بین ساعت‌های ۱۲ ظهر تا ۲ بعدازظهر اگر کسی در آن رستوران غذایی سفارش داد و آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید، غذا را مجانی به مشتری بدهد. زمانی که خانوادهٔ بهارلو به این رستوران رفتند، عبارت‌های زیر درست بودند:

الف) ساعت بین ۱۲ ظهر و۲ بعدازظهر بود.

ب) آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به‌طول انجامید.

خانوادهٔ بهارلو نتیجه گرفتند که غذایشان مجانی خواهد بود که نتیجه‌گیری درستی بود!

این مثال نیز نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

مثال ۵: فرض کنید که دو عدد فرد را با هم جمع می‌کنیم. توضیح دهید که چرا مجموع آن‌ها همیشه زوج است؟

حل: فرض کنید $۲m+۱$ و $۲n+۱$ نشان‌دهندهٔ دو عدد فرد باشند که m و n اعداد طبیعی هستند. درنتیجه مجموع آن‌ها چنین است:

$$(۲m+۱)+(۲n+۱)=۲m+۲n+۲=۲(m+n+۱)$$

به دلیل وجود ضریب ۲ در این مجموع، نتیجه می‌گیریم که **مجموع دوعدد فرد همیشه زوج است.**

ثابت کردیم که مجموع دو عدد فرد همیشه یک عدد زوج است، حتّی برای اعدادی که آن‌ها را جمع نکرده‌ایم! این امر نشان‌دهندهٔ قدرت استدلال استنتاجی است.

وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه همیشه درست است.

هدف از مثال‌های فوق، ایجاد زمینه‌ای مناسب برای آشنایی با مفهوم استدلال استنتاجی بود. بیشتر این مثال‌ها نمونه‌هایی از **قضایای کلّی** هستند.

***قضایای کلّی** احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.*

اکثر قضیه‌های مهمّ ریاضی قضایای کلّی هستند. به عنوان مثال، اهمیّت قضیهٔ فیثاغورث در این نیست که در **یک** مثلث قائم‌الزاویه صدق می‌کند، بلکه این قضیه برای **همهٔ** مثلث‌های قائم‌الزاویه صحیح است، و یا اهمیّت اتّحاد $\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$ در این است که x **هر** زاویه‌ای که باشد، این تساوی برقرار است.

۱ــ۸ــ مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً درست است. این جامعیّت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتّفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیّت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

مثال ۶: بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به‌صورت حاصل جمع اعداد متوالی نوشت. به‌نمونه‌های زیر توجّه کنید:

$$۹ = ۲ + ۳ + ۴$$
$$۱۵ = ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵$$
$$۲۲ = ۴ + ۵ + ۶ + ۷$$
$$۳۹ = ۱۲ + ۱۳ + ۱۴$$
$$۷۴ = ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت؟

حل: برای درست فهمیدن مسأله، باید به دو سؤال اساسی پاسخ گوییم. اوّل آن‌که آیا مثال‌ها برای حل مسأله کافی هستند؟ و دوّم این‌که آیا امکان دارد که تمام اعداد طبیعی را برای بررسیِ داشتنِ چنین کیفیّتی کنترل کرد؟

یکی از راه‌های خوب آن است که سعی کنیم یک عدد طبیعی بیابیم که چنین کیفیّتی را نداشته باشد. از هر عددی که بخواهیم شروع می‌کنیم و به جستجو ادامه می‌دهیم.

الف) $۱۲ = ۳ + ۴ + ۵$

ب) $۱۷ = ۸ + ۹$

پ) $۲۶ = ۵ + ۶ + ۷ + ۸$

ت) $۳۰ = ۹ + ۱۰ + ۱۱$

ث) $۴۰ = ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$

ج) $۱۰۰ = ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲$

چ) $۱۳۰ = ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴$

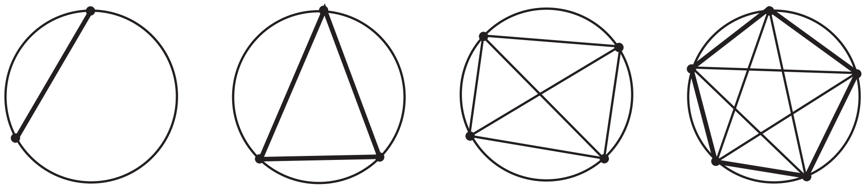
ح) $۶ = ۱ + ۲ + ۳$

خ) $۷ = ۳ + ۴$

د) $۸ = ?$

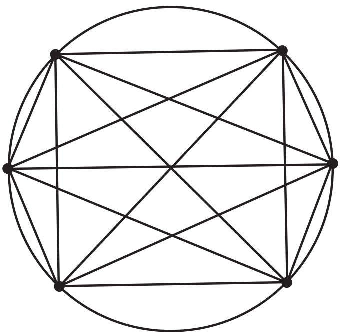
می‌بینیم که عدد ۸ را نمی‌توان به‌صورت مجموع اعدادِ متوالی نوشت. عدد ۸ **مثال نقضی** است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به صورت اعداد متوالی نوشت.

مثال ۷: اگر دو نقطهٔ اختیاری بر روی پیرامون دایره را به‌وسیلهٔ یک پاره‌خط به هم وصل کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتّصال سه نقطهٔ اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطهٔ اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد :



تعداد نقطه‌ها	۲	۳	۴	۵
تعداد ناحیه‌ها	۲	۴	۸	۱۶

نتیجه احتمالی: اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه‌ها ۳۲ است.



حل: ۶ نقطه بر روی دایره‌ای اختیار می‌کنیم و آن‌ها را به وسیلهٔ پاره‌خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. با توجّه به شکل روبرو، می‌بینیم که تعداد ناحیه‌ها به‌صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... افزایش می‌یابند. با استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد که پاره‌خط‌هایی که ۶ نقطه را به هم متّصل می‌کنند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می‌کنند. امّا با توجّه به شکل روبرو مشاهده می‌شود که این **نتیجهٔ احتمالی** نادرست است. با شمردن تعداد ناحیه‌ها، می‌بینیم که تعداد آن‌ها ۳۰ است.

این مثال، معرّف مراحلی است که نشان‌دهندهٔ نادرستی حدس ما است. اگرحتّی یک مثال پیدا شود که حدس ما را نادرست کند، گوییم که با **مثال نقض** نادرستی حدس ثابت شده است.

*به مثالی که نشان دهد نتیجه‌گیری کلّی غلط است، **مثال نقض** می‌گویند.*

مثال ۸: برای هر دو عدد گنگ x و y می‌خواهیم ببینیم آیا $x+y$ نیزگنگ است یا خیر؟

حل: کافی‌است نشان دهیم که x و yای پیدا می‌شوند که گنگ باشند امّا مجموع آن‌ها، یعنی $x+y$ ، گنگ نباشد. برای این کار اگر دو عدد گنگ $x=۲+\sqrt{۲}$ و $y=۲-\sqrt{۲}$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم

$$x+y=(۲+\sqrt{۲})+(۲-\sqrt{۲})$$
$$=۲+۲=۴$$

که یک عدد گویا است. پس این مثال، نتیجه‌گیری کلّی را نقض کرد. یعنی مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ نیست.

۱ــ۹ــ قضایای شرطی

بیشتر شما با ضرب المثل‌های فارسی که معمولاً هدفشان آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهای بخصوصی است آشنا هستید. «نابرده رنج گنج میسّر نمی‌شود»، «کارها نیکو شود امّا به‌صبر» و «سحرخیز باش تا کامروا باشی» از این نوع ضرب المثل‌ها هستند، یعنی اگر به‌ترتیب شرط «رنج بردن»، «صبوری» و «سحرخیزی» وجود داشته باشد، آنگاه «رسیدن به گنج »، «نیکویی در کارها» و «کامروایی» میسّر می‌شود.

همان‌طور که دقّت کرده‌اید، در سرتاسر ریاضی که تا به حال یاد گرفته‌اید، به دفعات با جملات شرطی از قبیل «اگر $x>۵$ آنگاه $۲x>۱۰$» که به ازای **تمام** مقادیر حقیقی x برقرار **هستند** روبرو شده‌اید. این نوع جملات را **قضایای شرطی** می‌نامند.

قسمت شرطی چنین جمله‌هایی (در مثال بالا $x>۵$) را **فرض قضیه** و نتیجهٔ جمله را (در مثال بالا $۲x>۱۰$) **حکم قضیه** می‌نامند.

مثال ۹: «هر نقطهٔ دلخواه روی عمود منصّف یک پاره‌خط، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است» مثالی از یک قضیهٔ شرطی است که در آن Mمعرّف نقطهٔ دلخواه بر عمودمنصّف پاره‌خط AB است و

فرض:نقطهٔ M بر عمودمنصّف پاره‌خط AB است.

حکم: $MA=MB$

حال به مثال زیر و ویژگی آن توجّه کنید :

مثال ۱۰: اگر نقطهٔ M از دو سر پاره‌خط AB به یک فاصله باشد یعنی : $MA=MB$، آنگاه M بر عمودمنصّف پاره‌خط AB قرار دارد.

دیده می‌شود که جای فرض و حکم در این مثال، با فرض و حکم مثال بالا عوض شده است.

جای فرض و حکم در عکس قضیهٔ شرطی با هم عوض می‌شوند.

نکته:باید توجّه داشت که همیشه عکس قضیه، یک قضیه نیست.

مثال ۱۱: اگر $x > ۰$ ، آنگاه $x^۲ > ۰$

این مثال یک قضیه است که در آن :

فرض: $x > ۰$

حکم:$x^۲ > ۰$

حال عکس این قضیه را در نظر بگیرید

«اگر $x^۲ > ۰$ ، آنگاه $x > ۰$» که در اینجا

فرض: $x^۲ > ۰$

حکم : $x > ۰$

امّا این یک قضیهٔ کلی نیست، زیرا به‌ازای xهای منفی ــ در حالی که فرض درست است ــ حکم درست نیست. مثلاً $x^۲ = (-۱)^۲ = ۱ > ۰$ امّا $x = -۱ < ۰$.

۱ــ۱۰ــ اثبات بازگشتی

از دانش‌آموزان کلاسی خواسته شده بود که قضیهٔ زیر را اثبات کنند :

قضیه: ثابت کنید که به‌ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y،نابرابری زیر همیشه برقرار است.

$$\frac{۱}{۲}(x+y) \geq \sqrt{xy} \qquad (۱)$$

نحوهٔ استدلال یکی از دانش‌آموزان چنین بود :

او طرفین (۱) را به توان ۲ رساند :

$$x^۲ + ۲xy + y^۲ \geq ۴xy \qquad (۲)$$

سپس $۴xy$ را از طرفین (۲) کم کرد و آنرا بدین‌صورت نوشت :

$$x^۲ - ۲xy + y^۲ \geq ۰ \qquad (۳)$$

$$(x-y)^۲ \geq ۰ \qquad (۴)$$

و نتیجه گرفت که چون همیشه $(x-y)^۲$ مثبت یا صفر است، پس (۴) برقرار و حکم ثابت است.

این‌گونه استدلال ویژهٔ این دانش‌آموز نیست و در بین سایر دانش‌آموزان نیز کم و بیش مرسوم است. آن‌ها به جای اثبات حکم، آن حکم را درست فرض کرده و به یک نتیجهٔ بدیهی یا دانسته شده ــ یعنی از حکم به فرض ــ می‌رسند. این شیوه، اثبات نیست بلکه ایدهٔ خوبی برای اثبات به دانش‌آموزان می‌دهد و همچنان‌که در ابتدای این فصل نیز گفته شد، استفاده از چنین روش‌های شهودی برای فهمیدن استدلال واقعی مفید است. با این حال باید دقّت داشته باشیم که استدلال شهودی ــ هرچند طبیعی و مفید ــ اگرچه می‌تواند مارا به‌طرف اثبات ریاضی راهبری کند امّا یک **اثبات ریاضی** نیست.

حال به بررسی مجدد اثبات فوق می‌پردازیم. می‌بینیم که درواقع این دانش‌آموز عکس قضیهٔ فوق را ثابت کرده بود، یعنی با فرض درستی

$$\frac{۱}{۲}(x+y)\geq\sqrt{xy} \qquad (۱)$$

به‌درستی (۴)، یعنی $(x-y)^۲\geq ۰$، رسیده بود. درحالی که فرض قضیه این بود که x و y اعداد حقیقی و مثبت هستند، پس در مورد آن‌ها (۴) برقرار است و هدف، اثبات حکم یعنی اثبات درستی نامساوی (۱) است:

$$\frac{۱}{۲}(x+y)\geq\sqrt{xy}$$

با این توضیحات، دوباره به اثبات ریاضی این قضیه می‌پردازیم.

اثبات: چون $(x-y)^۲$ همیشه بزرگتر و یا مساوی صفر است، نامساوی (۳) یعنی $x^۲-۲xy+y^۲\geq ۰$ از آن نتیجه می‌شود.

با افزودن $۴xy$ به طرفین نامساوی (۳)، نامساوی (۲) به‌دست می‌آید، یعنی:

$$x^۲+۲xy+y^۲\geq ۴xy \qquad (۲)$$

نامساوی (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(x+y)^۲\geq ۴xy$$

چون x و y هر دو مثبت هستند، درنتیجه:

$$\sqrt{(x+y)^۲}\geq\sqrt{۴xy}$$

و یا:

$$(x+y)\geq ۲\sqrt{xy}$$

که با تقسیم طرفین بر ۲ داریم :

$$\frac{۱}{۲}(x+y)\geq\sqrt{xy}$$

▨

*گاهی برای اثبات بعضی از قضیه‌ها ــ به خصوص در مورد تساوی‌ها، نامساوی‌ها و تساوی مجموعه‌ها ــ با استفاده از درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات می‌بایستی نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده **بازگشت‌پذیر** هستند وگرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود.*

گاهی برای ارزیابی ذکاوت و دقت افراد، اثبات‌هایی ارائه می‌شود که در آن‌ها درستی تساوی‌های غیر ممکنی را با ایجاد شبهه در فرد نشان می‌دهند! و سپس از آن‌ها علت را جویا می‌شوند ؟! در واقع، در این‌گونه اثبات‌ها، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً گاهی (اکثر اشتباهات) در اثبات قضیه‌ها و حل مسائل ریاضی حکم را فرض در نظر گرفته ، روی آن عملیات انجام داده، ظاهراً به نتیجه می‌رسیم! به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱۲: ثابت کنید ۶ = ۲!

اثبات:

(۱) $۲=۶$

با توجه به خاصیت جابه‌جایی تساوی

(۲) $۶=۲$

سپس از جمع دو رابطهٔ (۱) و (۲) خواهیم داشت!

---

(۳) $۸=۸$

امّا با توجّه به مطالبی که یاد گرفتیم، می‌دانیم که تنها درصورتی این اثبات درست است که برگشت‌پذیر باشد، یعنی بتوانیم از (۳) به (۲) و سپس به (۱) برسیم. درحالی که با یک نگاه درمی‌یابیم که چنین امری محال است یعنی از (۳) که ۸=۸ است نمی‌توانیم به تساوی (۲) که ۲=۶ و سپس به تساوی (۱) که ۶ =۲ است برسیم. درنتیجه عدم برگشت‌پذیری ادّعای فوق نشان می‌دهد که اثبات مذکور نادرست و فقط ایجاد شبهه بوده است! در واقع در اثبات فوق، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً به نتیجه رسیدیم.

تمرین: اثبات مثال ۱۲ را با اثبات دانش‌آموز در بخش ۱ــ۱۰ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می گیرید؟

«همه می‌دانند که اگر کسی جواب معمّا[1] را به شما گفته باشد، حلّ آن ساده خواهد بود. به سادگی می‌توان گفت که این عمل یک آزمونِ حافظه است. فقط درصورتی می‌توانید ادّعا کنید یک ریاضیدان هستید که معمّاهایی را که قبلاً هرگز مطالعه نکرده‌اید حل کنید. این یک آزمونِ استدلال کردن است.»

سایر[2]



تمرین

۱ــ با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.

الف) اگر باران ببارد، زمین مرطوب می‌شود. الآن باران می‌بارد.

نتیجه: زمین ☐ است.

ب) خطوط موازی هیچگاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.

نتیجه: L_1 و L_2 ☐

۲ــ آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.

الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند محاسبه کنند.

حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.

نتیجه: حمید می‌تواند محاسبه کند.

ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.

نرگس دانش‌آموز است.

نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.

پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است.

مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.

نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.

۳ــ نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟

۴ــ علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسهٔ خود هستند.

۱ــ Puzzle

۲ــ W.W. Sawyer: Mathematician’s Delight

با توجّه به شرایط زیر، آن‌ها را برحسب افزایش قد مرتّب کنید :

الف) حداقل دو نفر از آن‌ها از علی کوتاهتر می‌باشند،

ب) داوود از کامران کوتاهتر است،

پ) احمد کوتاهترین پسر نیست،

ت) داوود از علی بلندتراست.

۵ــ کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک غلط (نادرست) است. در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.

الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است.

ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگتر است.

پ) مجموع دو زاویهٔ حادّه کمتر از ۱۸۰ است.

ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می‌گیرد.

ث) هر مستطیلی یک مربع است.

ج) هر مربعی یک مستطیل است.

۶ــ نمونه‌های زیر را درنظر بگیرید :

$$۶ = ۱^۲ + ۱^۲ + ۲^۲$$

$$۱۴ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲$$

$$۲۴ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۴^۲$$

$$۵۹ = ۱^۲ + ۳^۲ + ۷^۲$$

$$۶۱ = ۳^۲ + ۴^۲ + ۶^۲$$

$$۸۹ = ۲^۲ + ۲^۲ + ۹^۲$$

نتیجهٔ احتمالی آن است که : هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت. با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه‌گیری فوق غلط است.

۷ــ کدام‌یک از احکام زیر درست هستند؟

الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آنگاه (x+y) گویا است.

ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آنگاه x+y گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال‌های نقض بیاورید.

۸ــ بعضی از احکام زیر قضایای کلّی هستند. قضایای کلّی را اثبات کرده و برای نادرستی باقی احکام مثال نقض بیاورید :

الف) حاصلضرب هر دو عدد حقیقی کوچکتر یا مساوی نصف مجموع مربع‌های آن‌هاست.

ب) مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست.

پ) هر دو زاویهٔ مساوی، متقابل به‌رأس هستند.

ت) اگر $x > ۱$ ، آنگاه $x > ۲$.

ث) اگر $x > ۲$ ، آنگاه $x > ۱$.

ج) اگر $(x-۱)^۲ = ۰$ ، آنگاه $x=۱$.

چ) اگر $ab=۰$، آنگاه $a=۰$ و $b=۰$.

۱ــ۱۱ــ برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد. آنگاه با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم.

مثال ۱: نشان دهید که با فرض صحیح بودن n، اگر $n^۲$ زوج باشد، n نیز زوج است.

حل: به‌جای اثبات زوج بودن n، می‌توانیم نشان دهیم که n نمی‌تواند فرد باشد.

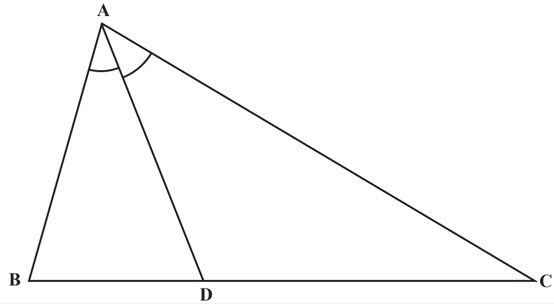
ابتدا فرض می‌کنیم n فرد باشد یعنی $n = ۲k + ۱$ که دراینجا k یک عدد صحیح است. درنتیجه داریم :

$$n^۲ = (۲k+۱)^۲ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ = ۴(k^۲ + k) + ۱$$

و این نشان‌دهندهٔ آن است که $n^۲$ فرد است.

می‌بینیم که این یک تناقض است. زیرا فرض مسأله بر این بود که $n^۲$ زوج باشد. یعنی $n^۲$ نمی‌تواند هم زوج (طبق فرض مسأله) و هم فرد (طبق نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌ایم) باشد، بنابراین به‌یک تناقض می‌رسیم. تنها توجیه این تناقض آن است که فرض فرد بودن n نادرست است، پس n باید زوج باشد.

مثال ۲: فرض کنید AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq CD$ ثابت کنید $AB \neq AC$.



حل: اثبات را از طریق برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنید نتیجه مطلوب یعنی $AB \neq AC$ درست نباشد یعنی AB=AC. بنابراین مثلث ABC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز AD میانه نیز هست. بنابراین $BD = DC$ که این با فرض مسأله یعنی $BD \neq CD$ در تضاد است. بنابراین فرض درست نبودن $AB \neq AC$ رد می‌شود. یعنی $AB \neq AC$.

روش استدلالی مورد استفاده در دو مثال قبل را **برهان خلف** یا اثبات غیرمستقیم می‌نامند که در تمام ریاضیّات کاربرد دارد.

برهان خلف

برای استفاده از برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) گام‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

گام ۱: *فرض می‌کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد.*

گام ۲: *نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به‌دست می‌دهد که حقایق دانسته شده را نقض می‌کند.*

گام ۳: *حال که به یک تناقض رسیده‌ایم، معلوم می‌شود که فرضی که در گام اوّل کرده بودیم نادرست است. بنابراین نتیجهٔ مطلوب باید درست باشد.*

مثال ۳: نشان دهید که $\sqrt{۲}$ گنگ است.

اثبات: فرض کنیم نتیجهٔ مطلوب درست نباشد یعنی $\sqrt{۲}$ گنگ نبوده، گویا باشد (گام ۱). حال با توجّه به تعریف گویا بودن یک عدد، $\sqrt{۲}$ را به صورت کسر $\frac{p}{q}$ می‌نویسیم که در آن p و q اعداد صحیح (متعلّق به $\mathbb{Z}$) و کسر $\frac{p}{q}$ به ساده‌ترین صورت خود است. یعنی p و q نسبت به هم اوّل هستند یعنی $(p,q)=۱$ و

$$\sqrt{۲} = \frac{p}{q} \qquad (۱)$$

طرفین (۱) را به توان دو می‌رسانیم:

$$۲ = \frac{p^۲}{q^۲} \qquad (۲)$$

سپس با ضرب طرفین (۲) در $q^۲$ خواهیم داشت:

$$۲q^۲ = p^۲ \qquad (۳)$$

از (۳) نتیجه می‌شود که p^2 عددی زوج است. حال طبق مثال ۱، می‌دانیم که با فرض صحیح بودن p، اگر p^2 زوج باشد، p نیز زوج است یعنی :

$$p = 2k \qquad (۴)$$

درنتیجه :

$$p^2 = 4k^2 \qquad (۵)$$

در (۵) به‌جای p^2 ، معادل آن را از (۳) که همان $2q^2$ باشد جایگزین می‌کنیم :

$$2q^2 = 4k^2 \qquad (۶)$$

پس از تقسیم طرفین بر ۲ داریم :

$$q^2 = 2k^2 \qquad (۷)$$

از (۷) نتیجه می‌گیریم که q^2 زوج بوده، باز طبق مثال۱، q نیز زوج است و این خلاف فرض است. زیرا در این صورت p و q هر دو مضارب ۲ هستند و نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند (گام ۲). درنتیجه فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ نادرست بوده پس $\sqrt{2}$ می‌بایستی گنگ باشد .



تمرین

با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، احکام زیر را ثابت کنید :

۱ــ اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است.

۲ــ اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.

۳ــ اگر n^2 مضربی از ۱۰ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۱۰ است.

۴ــ از یک نقطه خارج یک خط نمی‌توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.

۵ــ ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.

۶ــ اگر سه خط راست d ، d' و d'' دوبه‌دو متمایز باشند و $d \parallel d'$ (بخوانید d موازی d') و $d' \parallel d''$ ، آنگاه $d \parallel d''$.

۷ــ ثابت کنید $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ گنگ است.

۸ــ ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $(x+y)$ گنگ است.

۹ــ اگر $2, 3, 5, \ldots, P$ تمام اعداد اوّل کوچکتر یا مساوی P باشند، ثابت کنید که $N = (2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times P) + 1$ یا اوّل است و یا عامل اوّل بزرگتر از P دارد.

اگر مطالب یک موضوع درسی یکدیگر را نقض کنند، آن درس گیج‌کننده می‌شود. با این حال در استدلال استنتاجی ... گاهی وقت‌ها اگر سعی کنیم و عامدانه به تناقض برسیم مفید خواهد بود!

هارولد ژاکوبز، ۱۹۷۴[۱]

۱ــ۱۲ــ اصل لانه کبوتر

بسیاری از بدیهیات دنیای اطراف و زندگی روزمرّهٔ ما، قانونمندی ریاضی دارند و درعین سادگی و ظرافت، دارای کاربردهای گوناگون و متنوّع هستند. به عنوان مثال، واضح است که اگر ۵ کبوتر به طرف ۴ لانه پرواز کنند و بخواهند داخل لانه‌ها بشوند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو کبوتر خواهد بود! همچنین اگر ۹ نفر در یک میهمانی حضور داشته باشند،حداقل روز تولد دو و یا چند نفر از آن‌ها در یک روز هفته می‌باشد. مثال‌هایی از این قبیل برای همهٔ ما آشناست. **اصل لانه کبوتر** توجیه‌کنندهٔ دو مثال بالا و یکی از همین بدیهیات است که با این حال بعضی از مسایل پیچیدهٔ ریاضی را قابل حل می‌کند. این اصل، بخصوص در مواقعی که می‌خواهیم رخداد موقعیّت خاصّی را بررسی کنیم، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل لانه کبوتر

*اگر m کبوتر، n لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه کبوترها باشد $(m > n)$،آنگاه **طبق اصل لانه کبوتر** حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو و یا بیشتر از دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.*

مثال۱: S یک زیرمجموعهٔ ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیماندهٔ یکسانی بر ۳۶ هستند.

حل: می‌دانیم که تقسیم هر عدد طبیعی n بر ۳۶ به‌صورت $n = ۳۶q + r$ است که q خارج‌قسمت، r باقیمانده و $۰ \le r < ۳۶$ است. بنابراین مجموعهٔ باقیمانده‌ها، یعنی $\{۰,۱,۲,...,۳۵\}$، دارای ۳۶ عضو است. مشابهت این مثال با لانهٔ کبوتر چنین است که اگر اعضای S (۳۷ عضو) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده‌ها (۳۶) را لانه کبوترها در نظر بگیریم، آن‌وقت درمی‌یابیم که حداقل یکی از لانه‌ها

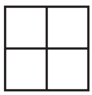
۱ــ H. Jacobs

پذیرای دو و یا تعداد بیشتری کبوتر می‌باشد! یعنی :

حداقل دو عضو از مجموعهٔ S دارای باقیماندهٔ یکسانی بر ۳۶ خواهند بود.

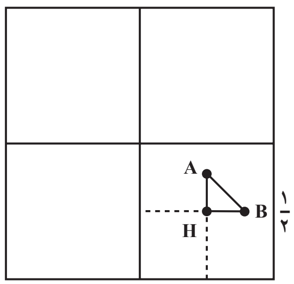
تمرین: S یک زیرمجموعهٔ ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۲۵ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده‌اند.

مثال ۲: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصلهٔ دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.



حل: با رسم محورهای تقارنی که موازی‌اضلاع هستند، سطح مربع را به ۴ مربع مساوی تقسیم می‌کنیم (مطابق شکل).

۴ مربع کوچکتر را ۴ لانه کبوتر و ۵ نقطهٔ مفروض را ۵ کبوتر درنظر می‌گیریم که می‌خواهند به داخل لانه‌ها برگردند در ضمن، نقاط روی مرز را متعلّق به هر دو مربع می‌گیریم. بنابراصل لانه کبوتر، حداقل دوتا از نقطه‌ها به یکی از مربع‌های کوچک تعلّق دارند ــ همان‌طوری که حداقل دو کبوتر، به لانهٔ مشترک می‌روند ــ و با استفاده از قضـــیهٔ فیثاغورس درمی‌یابیم که فاصلهٔ آن دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است. با توجّه به شکل ، صحّت این ادّعا را نشان می‌دهیم



محاسبه: با توجّه به اینکه طول ضلع مربع بزرگ ۱ است، درنتیجه طول ضلع مربع‌های کوچک $\frac{۱}{۲}$ و فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس به‌دست می‌آید :

$$(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲$$

امّا شکل معلوم می‌کند که طول‌های AH و BH از $\frac{۱}{۲}$ که طول ضلع مربع‌های کوچک است کمتر هستند. درنتیجه :

$$(AB)^۲ < \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۱}{۲}\right)^۲$$

$$(AB)^{۲} < \frac{۲}{۴}$$

یعنی :

$$AB < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

و حکم ثابت است.



تمرین

۱ــ۱۳ نفر در یک میهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل ۲ نفر از آن‌ها در یک ماه متولّد شده‌اند.

۲ــ آمار نشان می‌دهد که تعداد تارهای موی سر افراد بیش از ۳۰۰۰۰۰ نیست. ثابت کنید در شهری که ۳۰۰۰۰۲ نفر جمعیّت دارد، حداقل دو نفر از شهروندان تعداد تارهای مویشان با هم مساوی است.

۳ــ مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث درنظر می‌گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصلهٔ آن‌ها کمتر از $\frac{۱}{۲}$ است.

۴ــ نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ $S = \{۱, ۲, ۳, ..., ۹\}$ که دارای ۶ عضو باشد حداقل دو عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

۵ــ با استفاده از **برهان خلف**، اصل لانه کبوتر را که تا حال به‌طور شهودی بدیهی فرض کرده بودیم اثبات کنید.

مجلهٔ ریاضی

نظریهٔ مجموعه‌ها *از اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی مطرح شد و پس از مدتی به‌عنوان مبانی ریاضیات جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد.*

ریاضیدانان گوناگونی در تحکیم این نظریه فعالیت داشته‌اند ولی ریاضیدان آلمانی ***گ.کانتور*** *در این مورد نقشی اساسی داشت. کانتور در سن‌پترزبورگ (روسیه) متولد شد، خانواده‌اش در طفولیت وی به آلمان مهاجرت کرد و در سال‌های ۱۸۷۲ الی ۱۹۱۳ استاد دانشگاه* ***هالد*** *در آلمان بود و در این دوران آثار عمیق خود را در نظریه مجموعه‌ها تألیف کرد.*

فصل ۲

مجموعه ــ ضرب دکارتی و رابطه

۲ــ۱ــ مجموعه

فکر می‌کنید می‌توانیم مفهوم مجموعه را به کمک مفهوم‌های ساده‌تری از خود مفهوم مجموعه تعریف کنیم؟!

این کار امکان‌پذیر نیست! ولی اغلب افراد با این مفهوم آشنا هستند و آن را به‌کار می‌برند. به‌عنوان مثال عبارت‌های «دانش‌آموزانی که معدل آنها ۱۶ است»، «نقطه‌هایی در فضا که از دو نقطهٔ مفروض به یک فاصله‌اند»، «عددهای ۲، ۳، ۵ و ۷» و «همهٔ کسانی که گواهینامهٔ رانندگی دارند» هر کدام یک مجموعه هستند. درواقع مجموعه به‌عنوان دسته‌ای از اشیای کاملاً معین درنظر گرفته می‌شود که با **نام بردن اعضای** آن یا **معرفی خاصیت مشترک** اعضای آن مشخص می‌شود.

در این فصل ضمن آشنایی بیشتر با طبیعت مجموعه‌ها به بررسی روش‌های طبیعی و متعدد ترکیب و پیرایش مجموعه‌ها، برای تشکیل مجموعه‌های دیگر می‌پردازیم. همان‌طور که بررسی نظام‌وار ویژگی‌های کلی اعداد همراه با اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم به جبر اعداد می‌انجامد ؛ مطالعهٔ نظام‌وار این روش‌ها نیز به نوعی «جبر» مجموعه‌ها منجر می‌شود.

معمولاً در حالت کلی مجموعه را با یکی از حروف بزرگ A، B، C،... نشان می‌دهیم.

اشیایی که با هم مجموعهٔ مفروضی را تشکیل می‌دهند، **عضوها** یا **عنصرهای** آن مجموعه نامیده می‌شوند. برای آن‌که تعلق عضوی چون x به مجموعه‌ای چون A را به‌طور نمادی بیان کنیم، می‌نویسیم

$$x \in A$$

و اگر x عضو مجموعهٔ A نباشد و یا به عبارت دیگر x متعلق به A نباشد، می‌نویسیم

$$x , A$$

بدیهی است برای شناختن یک مجموعه باید بدانیم دقیقاً چه چیزهایی عضو آن هستند.

گفتیم یک مجموعه با نام بردن اعضای آن یا معرفی خاصیت مشترک اعضای آن مشخص

می‌شود. مثلاً مجموعه اعداد اول یک رقمی را با نام بردن اعضای آن به‌صورت

$$\{۲,۳,۵,۷\}$$

و یا با بیان خاصیت مشترک اعضای آن به‌صورت

$$\{x| \quad \text{عدد اول یک رقمی است } x\}$$

نشان می‌دهیم که آن را با به‌کار بردن نماد «$x<۱۰$» به‌جای «x یک رقمی است» و «$x\in P$» به‌جای «x عددی اول است» به‌صورت

$$\{x| \quad x<۱۰, x\in P\}$$

می‌نویسیم.

به‌عنوان مثالی دیگر؛ می‌دانیم مجموعه نقطه‌هایی از یک صفحه که به فاصلهٔ معینی از نقطهٔ مفروضی در آن صفحه باشند یک دایره تشکیل می‌دهند. در این مثال مجموعه را به کمک یک شرط تعریف کرده‌ایم که باید عضوهای مجموعه با آن سازگار باشند و یا می‌توان گفت، خاصیتی را معین کرده‌ایم که عضوهای مجموعه باید آن را داشته باشند. نقطه‌های واقع بر محیط دایره، با این شرط سازگارند و یا دارای این خاصیت هستند که، همهٔ آن‌ها در یک صفحه قرار گرفته‌اند و از نقطه مفروضی (O مرکز دایره) به یک فاصله (r اندازهٔ شعاع دایره) هستند.

در مشخص کردن یک مجموعه، ممکن است مناسب، یا حتی امکان‌پذیر نباشد که فهرست کاملی از اعضایش را بنویسیم. مجموعهٔ نقاط روی دایره به مرکز O و شعاع r از آن جمله هستند؛ یا مانند مجموعهٔ اعداد اول امکان نوشتن همهٔ عضوهای آن نباشد،

$$P=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,\ldots\}$$

مفهوم‌های «شرط» و «خاصیت» پیوندی جدی با مفهوم «مجموعه» دارند. به‌طور کلی هر تعریف از نوع

$$S=\{x| \quad \text{شرطی در مورد } x\}$$

به این معنی است که S مجموعهٔ همهٔ xهایی است که در مورد آن‌ها شرط مفروضی صادق باشد. به‌طور مثال اگر A را مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲-۴x-۵=۰$$

درنظر بگیریم می‌توان آن را بعد از حل معادله به‌صورت

$$A=\{-۱,۵\}$$

نشان داد، یا از حل معادله اجتناب کرده آن را به‌صورت

$$A=\left\{x\middle| \quad x^۲-۴x-۵=۰\right\}$$

بنویسیم. به این طریق نیز تعریفی دقیق و بدون ابهام برای A به‌دست می‌آید.

حال به‌عنوان مثالی دیگر مجموعهٔ B را به‌صورت زیر درنظر بگیرید

$$B = \{x \mid -۲ \leq x \leq ۳\}$$

با کمی دقت متوجه ابهامی در تعریف این مجموعه می‌شویم. زیرا اگر فقط اعداد صحیح مورد نظر باشند، مجموعهٔ B شامل اعداد ۲−، ۱−، ۰، ۱، ۲ و ۳ می‌شود ولی اگر اعداد حقیقی مورد نظر باشند آنگاه همهٔ اعداد حقیقی دیگر بین ۲− و ۳ را نیز شامل می‌شود.

برای رفع یک چنین ابهامی، مجموعه‌ای چون U را که اعضای مجموعهٔ موردنظر باید از آن انتخاب شوند، مشخص می‌کنیم. به‌طورکلی هر تعریف به‌صورت

$$X = \{x \in U \mid \text{x شرطی در مورد}\}$$

به این معنی است که X مجموعهٔ تمام اعضایی مانند x موجود در مجموعهٔ U است که به‌ازای آن‌ها شرط مفروض در مورد x برآورده می‌شود. البته صورت معادل

$$X = \{x \mid x \in U \text{ و شرطی در مورد } x\}$$

نیز همان معنا را دارد ولی ما نمایش اول را ترجیح می‌دهیم چون بر نقش U تأکید بیشتری دارد.

مجموعه U که اعضای X طبق شرط تعیین شده از آن انتخاب می‌شوند، مجموعهٔ مرجع یا مجموعهٔ جهانی[1] خوانده می‌شود.

به‌عنوان مثال اگر A مجموعهٔ اعداد مضرب ۳ باشد، آنگاه مجموعهٔ جهانی را مجموعه اعداد صحیح «$\mathbb{Z}$» می‌گیریم و آن را به‌صورت

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = ۳k \ ,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

نشان می‌دهیم.

معمولاً خاصیت مشترک اعضای یک مجموعه را با $P(x)$ یا $q(x)$ نشان می‌دهیم و آن را گزاره‌نما با متغیر x می‌خوانیم. بنابراین برای نشان دادن مجموعهٔ X درحالت کلی می‌نویسیم :

$$X = \{x \in U \mid P(x)\}$$

که U مجموعهٔ جهانی و $P(x)$ به معنی «x خاصیت P دارد» می‌باشد (گزاره‌نما).

در مجموعهٔ

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid ۱ < x < ۲\}$$

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$، مجموعهٔ جهانی و $۱ < x < ۲$ همان $P(x)$ است.

۱ــ Universal Set

به‌طور کلی

گزاره نما عبارتی است شامل نمادی مانند x که هرگاه هر عضو مانند $a \in U$ را به‌جای x قرار دهیم جملهٔ حاصل یا به وضوح درست باشد یا به وضوح نادرست.

اگر چنین باشد می‌گوییم که این گزاره‌نما برای مجموعهٔ U معتبر است.

مثلاً عبارت $-۲ \leq x \leq ۳$ یک گزاره‌نماست که برای مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ و برای مجموعهٔ $\mathbb{R}$ معتبر است. یعنی با قرار دادن هر عدد صحیح یا حقیقی به‌جای x جمله‌ای به‌دست می‌آید که یا درست است یا نادرست. مثلاً جملهٔ $-۲ \leq ۱ \leq ۳$ درست است ولی $-۲ \leq ۶ \leq ۳$ نادرست است.

باید توجه کرد که گزاره‌نما در مجموعه‌های جهانیِ متفاوت تعریف می‌شود. مثلاً اگر M را مجموعهٔ چهارضلعی‌های محدب واقع در صفحه درنظر بگیریم آنگاه عبارت «x مربع است» گزاره‌نمایی است معتبر برای مجموعهٔ M و مجموعهٔ

$$\{x \in M | \text{x مربع است}\}$$

فقط مجموعهٔ مربع‌های واقع در صفحه است.

یا اگر S مجموعهٔ نقاط صفحه باشد، دایرهٔ به مرکز O و شعاع r را به‌عنوان یک مجموعه از نقاط به‌صورت

$$\{x \in S | \text{فاصلهٔ x از O برابر r است}\}$$

می‌نویسیم.

گفتیم یک مجموعه ممکن است به روش‌های مختلف توصیف شود. مثلاً اگر A مجموعه جواب‌های معادلهٔ

$$x^{۲} - ۶x + ۸ = ۰$$

باشد و B مجموعهٔ اعداد صحیح زوج بین ۱ و ۵، آنگاه A و B هر دو دقیقاً دارای دو عضو ۲ و ۴ هستند. با مشخص شدن اعضاء مشاهده می‌شود که این دو مجموعه برابرند. بنابراین طبیعی است بگوییم

دو مجموعهٔ A و B *برابرند اگر و فقط اگر اعضایشان یکی باشد* و می‌نویسیم

$$A=B$$

اگر A و B برابر نباشند می‌نویسیم $A \neq B$.

با توجه به تعریف بالا مشاهده می‌شود که مجموعه‌های $A=\{۵,۱۵,۲۵\}$ و $B=\{۱۵,۲۵,۵\}$ برابرند، زیرا هر عضو A عضو B نیز هست و هر عضو B نیز عضو A است.

تغییر ترتیب عضوهای یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد.

همچنین مجموعه‌های $C=\{۱,۳,۱,۶\}$ و $D=\{۳,۱,۳,۶\}$ نیز برابرند زیرا هر عضو C متعلق به D نیز هست و هر عضو D نیز به C تعلق دارد.

تکرار عضوها در یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد.

مجموعهٔ

$$A=\left\{x\in\mathbb{R} \middle| \quad x^{۲}+x+۱=۰\right\}$$

را درنظر بگیرید، با کمی دقت ملاحظه می‌کنید که هیچ عدد حقیقی در شرط این مجموعه صدق نمی‌کند، درنتیجه این مجموعه خالی از عضو است.

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد . یا { } نشان داده می‌شود.

حال با توجه به تعریف بالا آیا می‌توانید تفاوت مجموعه‌های .، {۰} و { .} را بیان کنید؟

۲ــ۲ــ زیرمجموعه

با حذف برخی از اعضای مجموعهٔ غیرتهی A، مجموعه‌های دیگری به‌دست می‌آیند که این مجموعه‌ها را زیرمجموعه‌های A می‌نامیم. مثلاً اگر از مجموعهٔ

$$A=\{۱,۲,۳,۴\}$$

اعضای ۱ و ۲ را حذف کنیم مجموعهٔ

$$B=\{۳,۴\}$$

به‌دست می‌آید که همهٔ اعضای آن در A نیز هستند. در این حالت می‌گوییم B زیرمجموعهٔ A است یا

A شامل B است.

B یک زیرمجموعه از A است اگر هر عضو B عضوی از A نیز باشد و می‌نویسیم
. B . A

به عبارت دیگر A . B اگر برای هر $x \in U$ از $x \in B$ نتیجه شود که $x \in A$. با توجه به این تعریف می‌توان گفت برای دو مجموعهٔ A و B اگر عضوی در B وجود داشته باشد که این عضو در A نباشد در این‌صورت B زیرمجموعهٔ A نیست و آن را به‌صورت A $\underline{+}$B نشان می‌دهیم.
بنابراین می‌توان گفت :

هر مجموعه‌ای زیرمجموعهٔ خودش است.

یعنی برای هر مجموعهٔ A داریم A . A . همچنین بدیهی است که U . A .

مثال ۱ : نشان دهید مجموعهٔ $A=\{۲,۳,۴,۵\}$ زیرمجموعهٔ $B=\{x \in \mathbb{Z}|$ زوج باشد $x\}$ نیست.

حل: باید نشان دهیم حداقل یک عضو A در B نیست.
چون $۳ \in A$ و B , ۳ بنابراین A$\underline{+}$B .
توجه کنید که لازم نیست بدانیم که آیا عضوهای دیگر A عضو B هستند یا خیر.

اگر A . B ولی $A \neq B$، آنگاه B زیرمجموعهٔ سرهٔ A نامیده می‌شود.

مثال ۲ : نشان دهید که مجموعهٔ $A=\{a,b\}$ زیرمجموعهٔ سرهٔ $B=\{a,b,c\}$ است.
حل: B . A است زیرا a و b هم متعلق به A و هم متعلق به B است. اما چون $c \in B$ ولی A , c درنتیجه $A \neq B$. بنابراین A یک زیرمجموعهٔ سرهٔ B است.
مثال ۳: اگر

$$A=\{x \in \mathbb{Z}| \quad -۲۰ \leq x \leq ۲۰\}$$

$$B=\{n \in \mathbb{Z}| \quad n^۲ \leq ۴۹\}$$

$$C=\{A,B,-۳,۴,۶\}$$

$$D=\{-۳,۴,۶,۷\}$$

آنگاه :

(چرا؟) B . A

A , A ولی A ∈ C زیرا C ⊈ A

(چرا؟) D . A

۷ , C ولی ۷ ∈ D زیرا D ⊈ C

−۳ , B ولی ۳ ∈ D زیرا D ⊈ B

مثال ۴: ثابت کنید . زیرمجموعهٔ هر مجموعه است.

حل: A .. زیرا اگر A_+. باید عضوی مانند x در . باشد که در A نباشد، و این غیرممکن است چون . عضوی ندارد.

با توجه به تعریف زیرمجموعه می‌توان تعریف تساوی دو مجموعه را به‌صورت قضیهٔ زیر بازنویسی کرد.

قضیه ۱: دو مجموعهٔ A و B مساوی هستند، یعنی A=B، اگر و تنها اگر B . A و A . B

برهان: اگر A=B آنگاه از آنجا که A . A ، نتیجه می‌گیریم که B . A و A . B .

برعکس، فرض می‌کنیم B . A و A . B آنگاه هر عضو A، عضوی از B است و هر عضو B، عضوی از A. از این‌رو اعضای A و B یکی هستند و لذا A=B. ▨

قضیه ۲: برای سه مجموعهٔ A، B و C اگر داشته باشیم B . A و C . B آنگاه داریم C . A.

برهان: چون B . A پس هر عضو A در B است و چون C . B پس هر عضو B در C است.

بنابراین هر عضو A، عضو C نیز هست درنتیجه C . A . ▨

توجه کنید که زیرمجموعه‌ها را نباید با اعضای مجموعه اشتباه گرفت زیرا که این دو مفهوم کاملاً متفاوت هستند.

مثال ۵: اگر $M=\{r,s,t\}$ ، کدام‌یک از احکام زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ در صورت نادرستی دلیل آن را بیان کنید.

الف) $r \in M$ ب) M . r

پ) $\{r\} \in M$ ت) M . {r}

حل: الف) درست.

ب) نادرست، علامت . بایستی دو مجموعه را به هم مربوط کند ولی در این‌جا r زیرمجموعهٔ

M نیست بلکه عضو M است.

پ) نادرست، علامت $\in$ بایستی یک شئ را به یک مجموعه مربوط کند، ولی $\{r\}$ زیرمجموعهٔ M است نه عضو M.

ت) درست.

مثال ۶: اگر $A = \{x \in \mathbb{R} | \quad ۲x = ۶\}$ آیا A=۳؟

حل: A یک مجموعه است که دارای تنها یک عنصر ۳ است، یعنی $A = \{۳\}$. پس عدد ۳ متعلق به A است نه مساوی A.

درنتیجه باید توجه داشته باشیم که عضو a و مجموعهٔ $\{a\}$ متفاوت هستند و آن‌ها را یکی نگیریم.

مثال ۷: آیا هر مجموعه‌ای دارای زیرمجموعهٔ سره است؟

حل: مجموعهٔ تهی دارای زیرمجموعهٔ سره نیست ولی بقیه مجموعه‌ها . را به‌عنوان زیرمجموعهٔ سره خود دارند. اگر مجموعهٔ سره غیرتهی موردنظر باشد، مجموعه‌های تک‌عضوی دارای زیرمجموعهٔ سرهٔ غیرتهی نیستند ولی بقیهٔ مجموعه‌ها که بیش از یک عضو دارند دارای زیرمجموعهٔ سرهٔ ناتهی می‌باشند.

۲ــ۳ــ مجموعهٔ توانی

مجموعهٔ $A = \{۱, ۲, ۳\}$ را درنظر می‌گیریم و همهٔ زیرمجموعه‌های A را می‌نویسیم که عبارتند از:

$$A = \{۱, ۲, ۳\}$$

.

$$A_۱ = \{۱\}$$

$$A_۲ = \{۲\}$$

$$A_۳ = \{۳\}$$

$$A_۴ = \{۱, ۲\}$$

$$A_۵ = \{۱, ۳\}$$

$$A_۶ = \{۲, ۳\}$$

حال اگر مجموعهٔ این زیرمجموعه‌ها را با

$$P(A) = \{A, ۰ \quad , A_۱, A_۲, A_۳, A_۴, A_۵, A_۶\}$$

نشان دهیم، $P(A)$ مجموعهٔ توانی A خوانده می‌شود. پس

> *مجموعهٔ کلیهٔ زیرمجموعه‌های X، مجموعهٔ توانی X نامیده می‌شود و با $P(X)$ نشان داده می‌شود.*

مثال ۸: مجموعهٔ توانی $B=\{a,b\}$ را بنویسید.

حل: کلیهٔ زیرمجموعه‌های B عبارتند از :

$$B=\{a,b\}$$

.

$$B_{۱}=\{a\}$$

$$B_{۲}=\{b\}$$

بنابراین

$$P(B)=\{\{a,b\},.\ ,\{a\},\{b\}\}.$$

چنانکه ملاحظه شد مجموعهٔ B که ۲ عضو داشت، مجموعهٔ توانی آن دارای $۲^{۲}=۴$ عضو بود و مجموعه A که ۳ عضو داشت، مجموعهٔ توانی آن $۲^{۳}=۸$ عضوی شد. شاید شما نیز با مشاهدهٔ مثال‌های بالا به حدس زیر رسیده باشید.

قضیه ۳: اگر مجموعهٔ A دارای n عضو باشد، مجموعهٔ توانی آن دارای ۲^{n} عضو خواهد بود.

برهان: این قضیه را با استفاده از استقرای ریاضی اثبات می‌کنیم.

اگر n=۱، مثلاً $A=\{a\}$ آنگاه :

$$P(A)=\{A,.\ \}$$

می‌بینیم که در این حالت $P(A)$ دارای $۲^{۱}$ عضو است و درنتیجه حکم قضیه برقرار است. اگر n=۲، مثلاً $A=\{a,b\}$ آنگاه

$$P(A)=\{A,.\ ,\{a\},\{b\}\}$$

که دارای $۲^{۲}$ عضو است و درنتیجه حکم قضیه در این حالت نیز برقرار است.

حال درستی حکم را برای n=k فرض می‌کنیم (فرض استقراء)، یعنی فرض می‌کنیم اگر مجموعهٔ A دارای k عضو باشد، مجموعهٔ توانی آن، $P(A)$، دارای ۲^{k} عضو است.

اگر به مجموعهٔ A یک عضو اضافه کنیم، یعنی مجموعه A، $k+1$ عضوی شود $(n=k+1)$، آنگاه این عضو با 2^k عضو دیگر مجموعهٔ توانی، 2^k مجموعهٔ جدید برای مجموعهٔ توانی پدید خواهد آورد.

یعنی تعداد عضوهای مجموعهٔ توانی A جدید، $2(2^k)$ یعنی 2^{k+1} می‌باشد و به این ترتیب نتیجه می‌شود که حکم قضیه برای هر عدد طبیعی، n برقرار است. ▨

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد مجموعهٔ **متناهی** می‌نامیم و مجموعه‌ای را که متناهی نباشد، مجموعهٔ نامتناهی می‌نامیم. مثلاً مجموعهٔ اعداد صحیح یک رقمی متناهی است ولی مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ نامتناهی است همچنین مجموعهٔ $\mathbb{N}$ نامتناهی است. تعداد عضوهای یک مجموعهٔ متناهی را **عدد اصلی** آن مجموعه می‌نامیم. مثلاً عدد اصلی مجموعهٔ

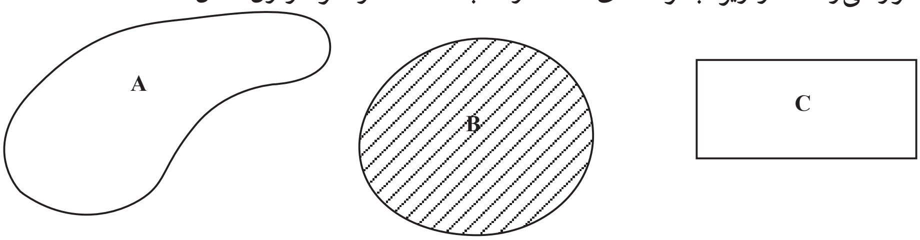
$$A=\{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰\}$$

۱۰ است، چون تعداد عضوهای آن ۱۰ تاست. عدد اصلی مجموعه‌ای مانند A را با $|A|$ یا $n(A)$ نشان می‌دهیم. باید توجه داشت که همواره می‌توان تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ متناهی را برحسب تعداد اعضای همان مجموعه به‌دست آورد ولی تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ نامتناهی تعریف نشده است.

تذکّر: مجموعهٔ $A=\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\}$ نیز نمونه‌ای از مجموعه‌های نامتناهی است.

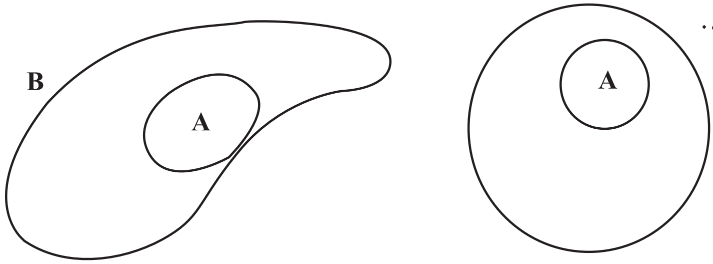
۲ـ۴ـ نمایش هندسی مجموعه‌ها

یکی از ابزارهای مهم استدلال‌های شهودی و استقرایی برای فهم بهتر مجموعه‌ها استفاده از تمثیل هندسی است. این‌کار برای بار اوّل توسط ریاضیدانی به‌نام وِن[۱] انجام شد و **نمودار ون** نام گرفت. در نمودار ون در حالت کلی اعضای مجموعه درون یک خم بسته در صفحه مانند دایره یا مستطیل نشان داده می‌شود. گاهی ناحیه داخلی شکلی را که برای نمایش مجموعه به‌کار می‌رود هاشور می‌زنند. در زیرمجموعه‌های A، B و C با استفاده از نمودار ون نشان داده شده‌اند.

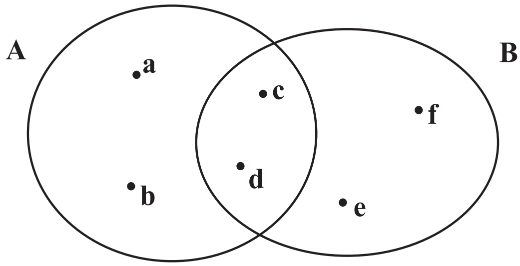


۱ــ Venn

به‌عنوان مثال اگر $B \ . \ A$ و $B \neq A$، آنگاه A و B را می‌توان به‌صورت هر یک از نمودارهای زیر نشان داد.



به‌عنوان مثالی دیگر، اگر $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{c, d, e, f\}$، آنگاه این مجموعه‌ها را با استفاده از نمودار ون به‌صورت مقابل می‌توان نشان داد.



باید توجه داشت که نمودار ون خود یک نوع تمثیل شهودی و هندسی است و به‌وسیلهٔ آن نمی‌توان یک قضیه ریاضی را ثابت کرد. بلکه برای اثبات می‌توان از آن‌ها ایده گرفت.



تمرین

۱ــ مجموعه‌های زیر را که با بیان خاصیتی معین، مشخص شده‌اند با گزاره‌نما نشان دهید.

الف) مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت

ب) مجموعهٔ اعداد صحیح که مربعشان بزرگتر از ۲۵ نباشد.

پ) مجموعهٔ اعداد حقیقی بین ۲ــ و ۲

۲ــ مجموعه‌های زیر را که با گزاره‌نما نوشته شده‌اند با نوشتن اعضا نشان دهید :

الف) $A = \{x \in \mathbb{N} | \quad x < ۵\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{Z} | \quad x^۲ \leq ۲۵\}$

پ) $C = \{x \in Q | \quad ۱۰x^۲ + ۳x - ۱ = ۰\}$

ت) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^{۳} + ۱ = ۰\right\}$

ث) $E = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x^{۳} + ۱ = ۰\right\}$

۳ــ هریک از مجموعه‌های زیر را با استفاده از یک گزاره‌نما بنویسید.

الف) $A = \{۱, ۴, ۹, ۱۶, ۲۵, \ldots\}$

ب) $B = \{۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, \ldots\}$

پ) $C = \left\{۰, \frac{۱}{۲}, \frac{۲}{۳}, \frac{۳}{۴}, \ldots\right\}$

ت) $D = \left\{۱ - \sqrt{۳}, ۱ + \sqrt{۳}\right\}$

۴ــ نشان دهید که مجموعه حروف لازم برای هجی کردن «بینابین» با مجموعهٔ حروف لازم برای هجی کردن «بیان» مساوی است.

۵ــ چه شرایطی بین d,c,b,a وجود داشته باشد تا تساوی زیر برقرار باشد؟

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$$

۶ــ نشان دهید : الف) اگر . . A آنگاه A = .

ب) اگر A . U آنگاه A=U

۷ــ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $\{-۱, ۰, ۱\}$ را بنویسید.

۸ــ تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ $S = \{۳, \{۱, ۴\}\}$ را بنویسید.

۹ــ از گزاره‌های زیر کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است.

الف) $\{\ \} . . =$

ب) $\{\ \} . . \in$

پ) $\{\ \} \ldots$

ث) $\{. ,\{. \}\} \in \{. ,\{. \},\{. ,\{. \}\}\}$

۱۰ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم مساویند.

$A = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < ۲\right\}$

$B = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid m^{۳} = m\right\}$

$C = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid m^{۲} \leq ۲m\right\}$

$D = \left\{m \in \mathbb{Z} \mid m^{۲} \leq ۱\right\}$

$E = \{۰, ۱, ۲\}$

۱۱ــ تعیین کنید که در مجموعه‌های زیر، کدام مجموعه، زیرمجموعهٔ دیگری است.

$A=\left\{x\in \mathbb{R} \mid x^{۲}-۸x+۱۲=۰\right\}$

$B=\{۲,۴,۶\}$

$C=\{۲,۴,۶,۸,...\}$

$D=\{۶\}$

۱۲ــ تعیین کنید کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است.

الف) $x\in\{\{x\},\{x,y\}\}$

ب) $\{x\} .\ \{\{x\},\{x,y\}\}$

پ) $\{۱,x,۲\} .\ \{۱,۲,x\}$

ت) $\{a,b\} .\ \{b,a\}$

ث) $\{x\}\in\{x\}$

۱۳ــ مثال‌هایی از مجموعه‌های دلخواه A و B و C بیاورید که برای آن‌ها احکام زیر درست باشند.

الف) $A\in B$ و $B\in C$ و $A ,\ C$

ب) $A\in B$ و $B\in C$ و $A\in C$

پ) $A\in B$ و $A .\ B$

۲ــ۵ــ جبر مجموعه‌ها

همان‌طور که با اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم در مجموعهٔ اعداد، اعداد جدیدی حاصل می‌شود، در نظریهٔ مجموعه‌ها نیز اعمالی مانند اجتماع، اشتراک، تفاضل تعریف می‌شود که به کمک آن‌ها می‌توان از دو مجموعهٔ داده شده، مجموعهٔ جدیدی ساخت.

اجتماع دو مجموعه

اجتماع مجموعه‌های A و B،مجموعه‌ای است که اعضایش، همهٔ اعضای A و همهٔ اعضای B را شامل می‌شود. به‌عنوان مثال اگر

$A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$

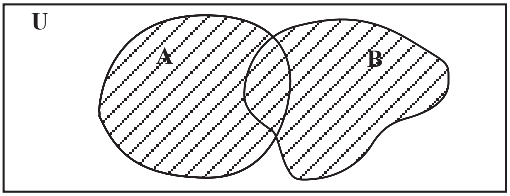
آنگاه اجتماع آن‌ها مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ است. یعنی

اجتماع مجموعه‌های A و B مجموعه‌ای است که اعضایش متعلق به A یا متعلق به B یا متعلق به هر دو مجموعهٔ A و B باشد.

اجتماع A و B را به‌صورت $A \quad B$ نمایش می‌دهیم. لذا داریم :

$A \quad B = \{x|$ است B و A یا x متعلق به هر دو مجموعهٔ $x \in B$ یا $x \in A\}$

با استفاده از نمودار ون، اجتماع دو مجموعه را می‌توان به‌صورت زیر نمایش داد.



A B

تبصره: با توجه به تعریف اجتماع دو مجموعه می‌توان نتیجه گرفت که دو مجموعهٔ $A \quad B$ و $B \quad A$ یکی هستند یعنی :

$$A \quad B = B \quad A$$

همچنین هریک از دو مجموعهٔ A و B زیرمجموعهٔ $A \quad B$ هستند، یعنی

$$A . \ A \quad B \quad \text{و} \quad B . \ A \quad B$$

مثال ۱: اگر $A = \{۱,۲,۳\}$ ، $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۳,۴,۵,۶\}$ آنگاه طبق تعریف اجتماع داریم :

$$A \quad B = \{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$$

$$C \quad B = \{۲,۳,۴,۵,۶,۸\}$$

$$B \quad B = \{۲,۴,۶,۸\}$$

در این مثال مشاهده می‌شود که $B \quad B = B$.

مثال ۲: فرض کنید A، B و C مجموعه‌های مثال ۱ باشند. می‌توان نشان داد

$$(A \quad B) \quad C = A \quad (B \quad C)$$

برای این منظور ابتدا $A \quad B$ را تعیین می‌کنیم

$$A \quad B = \{۱,۲,۳,۴,۶,۸\}$$

سپس اجتماع $A \quad B$ را با C به‌دست می‌آوریم

$$(A \quad B) \quad C = \{۱,۲,۳,۴,۶,۸,۵\}$$

به همین ترتیب برای محاسبهٔ (A   (B   C ابتدا B   C را تعیین می‌کنیم :

B   C = {۲, ۴, ۶, ۸, ۳, ۵}

و بعد اجتماع A و B   C را به‌دست می‌آوریم

A   (B   C) = {۱, ۲, ۴, ۶, ۸, ۳, ۵}

به‌وضوح مشاهده می‌شود که

(A   B)   C = A   (B   C)

مثال ۳: برای مجموعه‌های {۱, ۲} = A ، {۲, ۳} = B و {۱, ۲, ۳, ۴} = C ملاحظه می‌شود :

A . C و B . C

در این حالت برای مجموعهٔ

A   B = {۱, ۲, ۳}

نیز داریم

A   B . C

مشاهدهٔ بالا در حالت کلی برقرار است. این مطلب را می‌توان به‌صورت قضیهٔ زیر بیان کرد.

قضیه ۱: اگر A . C و B . C آنگاه A   B . C.

برهان: فرض می‌کنیم x ∈ A   B آنگاه طبق تعریف اجتماع، x ∈ A یا x ∈ B. اگر x ∈ A، چون طبق فرض قضیه داریم A . C ، بنابراین x ∈ C ؛ اگر x ∈ B ، چون طبق فرض قضیه B . C، بنابراین x ∈ C ؛ یعنی در هر صورت از x ∈ A   B نتیجه می‌شود x ∈ C. بنابراین

A   B . C ▨

قضیهٔ زیر خواص مقدماتی اجتماع را بیان می‌کند.

قضیه ۲: برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم :

الف) A   = . A

ب) A   A = A

پ) (A   B)   C = A   (B   C)

برهان: بندهای الف و ب با توجه به تعریف به‌سادگی اثبات می‌شود. در اینجا فقط به اثبات قسمت پ می‌پردازیم.

چون B . B   C و (A   (B   C . B   C بنابراین

B . A   (B   C)

امّا $(B \quad C) \quad A \;.\; A$ بنابراین طبق قضیهٔ ۱

$$A \quad B \;.\; A \quad (B \quad C) \qquad (۱)$$

امّا $C \quad B \;.\; C$ و $(B \quad C) \quad A \;.\; C \quad B$ بنابراین

$$C \;.\; A \quad (B \quad C) \qquad (۲)$$

براساس قضیهٔ ۱، از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$(A \quad B) \quad C \;.\; A \quad (B \quad C)$$

با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد

$$A \quad (B \quad C) \;.\; (A \quad B) \quad C$$

بنابراین

$$A \quad (B \quad C) = (A \quad B) \quad C$$

با توجه به برابری به‌دست آمده می‌توان پرانتزها را برداشت و نوشت

$$A \quad B \quad C$$

▨

قضیه ۳: اگر $A \;.\; B$ آنگاه $A \quad B = B$.

برهان: اگر $A \;.\; B$ چون $B \;.\; B$ طبق قضیهٔ ۱ خواهیم داشت :

$$A \quad B \;.\; B$$

اما از طرف دیگر می‌دانیم

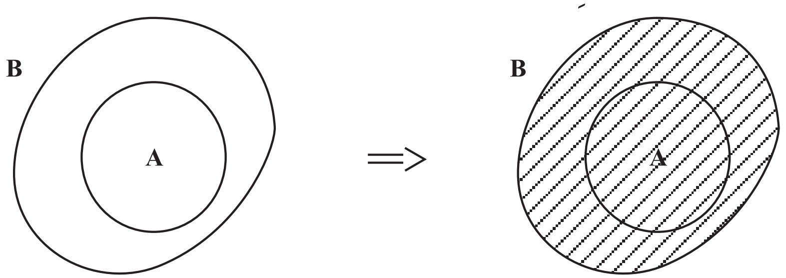
$$B \;.\; A \quad B$$

به این ترتیب از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود :

$$A \quad B = B$$

▨

با استفاده از نمودار وِنْ نیز نتیجهٔ این قضیه را می‌توان مشاهده کرد.



A . B   **A B = B**

عکس قضیهٔ ۳ نیز برقرار است.

قضیه ۴: برای هر دو مجموعهٔ A و B، اگر A B = B آنگاه A . B .

برهان: می‌دانیم B A . A و طبق فرض قضیه داریم A B = B . پس A . B . ▨

اشتراک دو مجموعه

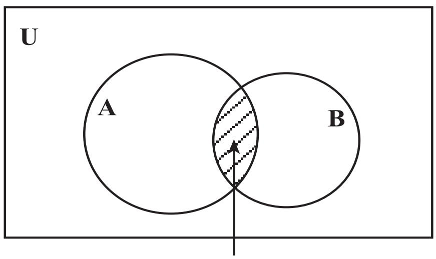
در دو مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳\}$ و $B = \{۳,۴,۵\}$ ، عدد ۳ مشترک است، لذا مجموعهٔ $\{۳\}$ اشتراک دو مجموعهٔ A و B خوانده می‌شود.

اشتراک دو مجموعهٔ A و B مجموعه‌ای است که اعضایش به هر دو مجموعهٔ A و B تعلق داشته باشد.

اشتراک دو مجموعهٔ A و B را با A B نمایش می‌دهیم، پس

$$A \quad B = \{x| \quad x \in B \ , \ x \in A\}$$

با استفاده از نمودار ون، اشتراک دو مجموعه را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد.



A B

تبصره: از تعریف اشتراک دو مجموعه نتیجه می‌شود که

A B = B A

همچنین چون عضوهای A B هم در A و هم در B قرار دارند بنابراین

A B . A

A B . B

اگر دو مجموعهٔ غیرتهی A و B عضو مشترک نداشته باشند آنگاه

A B = .

در این حالت دو مجموعهٔ A و B را **جدا از هم** یا **مجزا** می‌نامیم.

مشابه ویژگی‌هایی که برای اجتماع دو مجموعه برقرار بود، برای اشتراک هم برقرار است.

قضیه ۵: برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم :

الف) A   = ..

ب) A   A = A

پ) (A   B)   C = A   (B   C)

اثبات این قضیه به‌عنوان تمرین رها می‌شود.

قضیه ۶: برای هر دو مجموعهٔ A و B، اگر B . A آنگاه A   B = A .

برهان: چون A   B . A بنابراین کافی است ثابت کنیم A   B . A .

اگر x ∈ A چون B . A پس x ∈ B . حال با توجه به این‌که x ∈ A و x ∈ B می‌توان نتیجه گرفت که x ∈ A   B . یعنی A   B . A . حال از دو رابطهٔ A . B   A و A   B . A نتیجه می‌شود A   B = A . ▨

در پایان دو تساوی وجود دارند که اجتماع و اشتراک را درهم می‌آمیزند. ما این مطلب را در قضیهٔ زیر بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۷: (قوانین پخش‌پذیری)

برای هر سه مجموعهٔ A، B و C داریم :

الف) A   (B   C) = (A   B)   (A   C)

(پخش‌پذیری اجتماع نسبت به اشتراک)

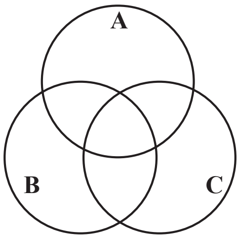
ب) A   (B   C) = (A   B)   (A   C)

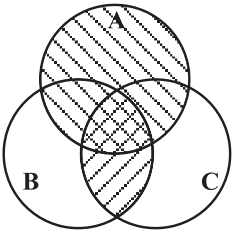
(پخش‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع)

یک راه تصورِ تساوی‌هایی که در قضیهٔ بالا مطرح شد،استفاده از نمودار ون است. برای تحقیق تساوی

A   (B   C) = (A   B)   (A   C)

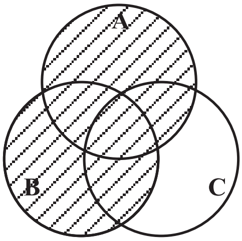
سه دایرهٔ دو به دو متقاطع برای نمایش مجموعه‌های A، B و C درنظر می‌گیریم.



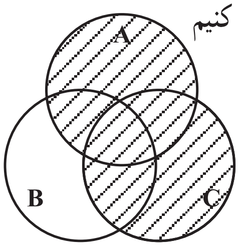


حال B C را سایه می‌زنیم و سپس اجتماع آن ناحیه را با A مشخص می‌کنیم. به این ترتیب ناحیهٔ سایه‌دار مجموعهٔ A (B C) را نمایش می‌دهد.

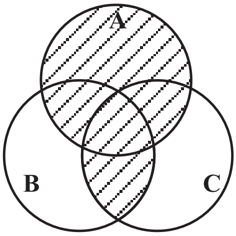
از سوی دیگر اگر دو مجموعهٔ A B و A C را روی شکل مشخص کنیم



A B



A C



اشتراک این دو ناحیه یعنی :

(A B) (A C)

را به‌صورت مقابل خواهیم داشت.

همین‌طور که ملاحظه می‌کنید ناحیه‌های یکسانی به‌دست آمد.

تفاضل دو مجموعه

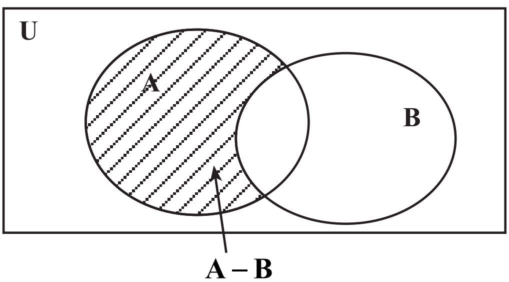
فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند

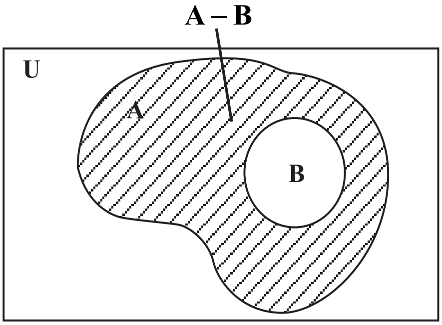
تفاضل مجموعه‌ای A − B عبارت است از مجموعهٔ تمام اعضایی از A که به B تعلق ندارند.

تفاضل دو مجموعه با استفاده از نماد ریاضی چنین بیان می‌شود

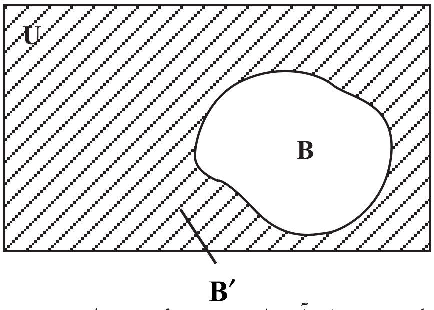
$$A - B = \{x \in A | \quad x , \quad B\}$$

و با استفاده از نمودار ون تفاضل دو مجموعه به‌صورت مقابل نشان داده می‌شود.





اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد، آنگاه A − B را **متمم** B نسبت به A می‌نامیم.



اگر A را برابر U (مجموعهٔ جهانی) بگیریم آنگاه U − B را با B′ نشان می‌دهیم و آن را **متمم** مجموعهٔ B نسبت به مجموعهٔ جهانی می‌نامیم. پس

$$U - B = B'$$

عمل متمم‌گیری از قوانین ساده‌ای پیروی می‌کند که برخی از آن‌ها در قضیهٔ زیر مطرح شده است.

قضیه ۸: اگر A و B دو زیرمجموعه از مجموعهٔ جهانی U باشند، آنگاه

الف) $.' = U$

ب) $U' = .$

پ) $(A')' = A$

ت) $A - B = A \quad B'$

ث) اگر $B \; . \; A$ آنگاه $A' \; . \; B'$

ج) $A \quad A' = .$

چ) $A \quad A' = U$

اثبات قضیه به کمک تعریف‌ها به سادگی انجام می‌شود.

به‌عنوان مثال اگر $\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی و Q مجموعهٔ اعداد گویا باشد آنگاه $\mathbb{R} - Q$ مجموعهٔ اعداد گنگ است.

اعمالی که تا اینجا تعریف شدند از دو قانون دیگر به‌نام **قوانین دمرگان** تبعیت می‌کنند.

قضیه ۹: اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعهٔ جهانی U باشند، آنگاه :

الف) $(A \quad B)' = A' \quad B'$

ب) $(A \quad B)' = A' \quad B'$

برهان: الف) فرض کنیم $x \in (A \quad B)'$ آنگاه $x, \ A \quad B$، پس $x, \ A$ و $x, \ B$ درنتیجه $x \in A'$ و $x \in B'$ بنابراین $x \in A' \quad B'$ به این ترتیب می‌توان نتیجه گرفت

$$(A \quad B)' \,.\, A' \quad B'$$

و اگر مراحل استدلال بالا را وارونه کنیم خواهیم داشت

$$A' \quad B' \,.\, (A \quad B)'$$

از روابط به‌دست آمده می‌توان تساوی

$$(A \quad B)' = A' \quad B'$$

را نتیجه گرفت. ▨

اثبات قسمت (ب) به‌عنوان تمرین به عهدهٔ دانش‌آموز است.

از قوانین دمرگان و بند (پ) قضیهٔ ۸ نتیجه می‌شود که اگر متمم‌گیری را بدانیم آنگاه اجتماع یا اشتراک را می‌توان به‌صورت زیر برحسب دیگری بیان کرد.

$$A \quad B = (A' \quad B')'$$

$$A \quad B = (A' \quad B')'$$

گفتیم اگر برای دو مجموعهٔ A و B داشته باشیم $A \quad B = .$ آنگاه دو مجموعه را جدا از هم می‌نامیم. حال با توجه به تعریف متمم یک مجموعه، می‌توان ویژگی زیر را برای دو مجموعهٔ جدا از هم A و B نتیجه گرفت.

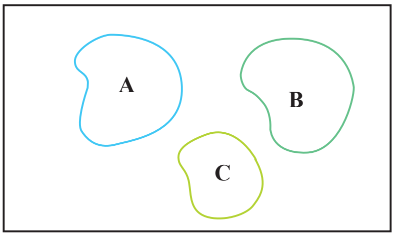
نتیجه: اگر $A \quad B = .$ آنگاه $A \,.\, B'$ و $B \,.\, A'$.

توجه کنید که مفهوم مجزا بودن سه مجموعه معنایی وسیعتر از

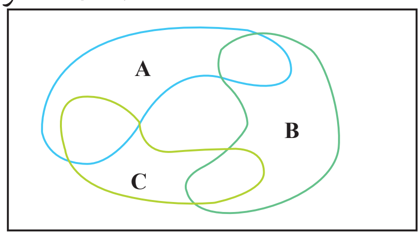
$$A \quad B \quad C = .$$

دارد. درواقع سه مجموعه A، B و C مجزا هستند اگر

$$A \quad B = . \quad \text{و} \quad A \quad C = . \quad \text{و} \quad B \quad C = .$$



A، B و C مجزا هستند



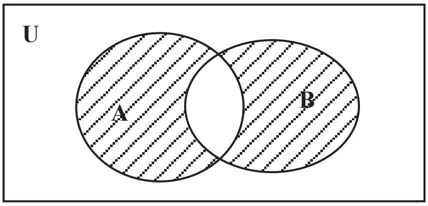
$A \quad B \quad C = .$
ولی A، B و C مجزا نیستند

تفاضل متقارن

مجموعهٔ تفاضل متقارن دو مجموعهٔ A و B شامل اعضایی است که دقیقاً به یکی از دو مجموعه A یا B تعلق دارند. این مجموعه به‌طور نمادی با $A.\ B$ نمایش داده می‌شود و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A.\ B=(A-B)\quad(B-A)$$

تفاضل متقارن دو مجموعه را با استفاده از نمودار ون به‌صورت زیر می‌توان نمایش داد.



$A.\ B$

همان‌طورکه از روی نمودار ون مشاهده می‌شود

$$A.\ B=(A\quad B)-(A\quad B)$$

بنابراین دو مجموعهٔ $A.\ B$ و $A\quad B$ مجزا هستند. همچنین سه مجموعهٔ $A-B$ ، $A\quad B$ و $B-A$ نیز مجزا هستند.

این فصل را با اثبات دو اتحاد از طریق جبر مجموعه‌ها به پایان می‌رسانیم.

مثال ۱: می‌خواهیم ثابت کنیم

$$A\quad(B-C)=(A\quad B)-(A\quad C)$$

برای اثبات این تساوی به کمک قوانین مجموعه‌ها که جبر مجموعه‌ها خوانده می‌شود از یک طرف تساوی شروع می‌کنیم و به طرف دیگر تساوی می‌رسیم (یا می‌توانیم دو طرف را ساده کنیم تا به‌یک نتیجه برسیم). اکنون سمت راست رابطهٔ بالا را درنظر می‌گیریم :

طبق ت از قوانین متمّم $\quad (A\quad B)-(A\quad C)=(A\quad B)\quad(A\quad C)'$

قانون دمرگان $\quad =(A\quad B)\quad(A'\quad C')$

پخش‌پذیری اشتراک نسبت به اجتماع

$$=[(A\quad B)\quad A']\quad[(A\quad B)\quad C']$$

قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری

$$=[(A\quad A')\quad B]\quad[A\quad(B\quad C')]$$

طبق ج از قوانین متمم $\quad =(.\quad B)\quad[A\quad(B\quad C')]$

طبق الف از قضیه ۵ $= . \quad [A \quad (B \quad C')]$

طبق الف از قضیه ۲ $= A \quad (B \quad C')$

طبق ت از قوانین متمم $= A \quad (B - C)$

مثال ۲: می‌خواهیم ثابت کنیم

$$A \quad (A \quad B) = A$$

از طرف چپ تساوی شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} A \quad (A \quad B) &= (A \quad . \;) \quad (A \quad B) \\ &= A \quad (. \quad\; B) \\ &= A \quad . \\ &= A \end{aligned}$$



تمرین

۱ــ اگر $A = \{۱,۲,۳,\{۱,۲,۳\}\}$ و $B = \{۱,۲,\{۱,۲\}\}$ مطلوب است $A \quad B$ ، $A \quad B$ ، $A - B$ و $B - A$.

۲ــ اگر $U = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ ، $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ ، $B = \{۲,۴,۶,۸\}$ و $C = \{۳,۴,۵,۶\}$ مطلوب است :

الف) A' ب) $(A \quad C)'$

پ) $B - C$ ت) $(A \quad B)'$

۳ــ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid -n \leq m, ۲^m \leq n\}$ ، $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ را تعیین کنید چه رابطه‌ای بین $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ وجود دارد؟

اشتراک $A_۱$ تا $A_۴$ چیست؟ $(\;{}_{i=۱}^{۴} A_i = ?)$ اجتماع $A_۱$ تا $A_۴$ چیست؟ $(\;{}_{i=۱}^{۴} A_i = ?)$ ،

(توضیح : $\;{}_{i=۱}^{n} A_i = A_۱ \quad A_۲ \quad \dots \quad A_n$)

۴ــ اگر $n \in \mathbb{N}$ و $A_n = \left(-\frac{۱}{n} \text{ و } \frac{۲n-۱}{n}\right)$ ، مطلوب است $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ سپس اجتماع و اشتراک $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ را مشخص کنید.

۵ــ اگر $i \in \{۱ ,۲ ,\dots ,۱۰\}$ و $A_i = [-i, ۱۰ - i]$ ، $A_۱$ و $A_۲$ و ... و $A_{۱۰}$ را حساب

کنید. سپس $\,_{i=۱}^{۱۰}\,Ai$ و $\,_{i=۱}^{۱۰}\,Ai$ را مشخص کنید.

۶ــ با ذکر مثال $n(A \quad B)$ را حساب کنید. آیا $n(A \quad B)=n(A)+n(B)$؟

۷ــ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر A و B مجموعه باشند. داریم :

الف) $A \quad B=(A-B) \quad (A \quad B) \quad (B-A)$

ب) $(A-B) \quad (B-A)=.$

ج) اگر $A\&C$ و $B\&C$ آنگاه $A \quad B\&C$

د) اگر $A\&B$ و $A\&C$ آنگاه $A\&B \quad C$

هـ) اگر $A \quad B=A \quad B$ آنگاه $A=B$

و) اگر $A\&B$ آنگاه $B'\&A'$

۸ــ برای هر دو مجموعهٔ A و B ثابت کنید :

الف) $A.\ B=B.\ A$

ب) $A.\ B=(A \quad B)-(A \quad B)$

ج) اگر $A \quad B=.$ آنگاه $A.\ B=A \quad B$

د) $A \quad (B.\ C)=(A \quad B).\ (A \quad C)$

۹ــ به‌وسیلهٔ نمودار ون نشان دهید که

$$A'-B'=B-A$$

۱۰ــ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید اگر A و B دو مجموعه باشند آنگاه داریم :

الف) $(A-B) \quad B=.$

ب) $B-A=B \quad A'$

پ) $A-B=A-(A \quad B)$

ت) $(A.\ B) \quad (A \quad B)=A \quad B$

۱۱ــ در هریک از موارد زیر به‌جای S یکی از مجموعه‌های $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ یا $\mathbb{R}$ را چنان جایگزین کنید تا تساوی درستی حاصل شود.

الف) $\{x\in S| \quad x^{۳}=۵\}=.$

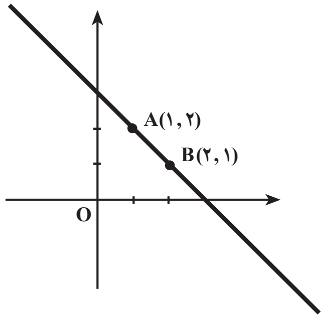
ب) $\{x\in S| \quad -۱\le x\le ۱\}=\{۱\}$

پ) $\{x\in S| \quad ۲<x^{۲}<۵\}-\{x\in S| \quad x>۰\}=\{-۲\}$

ت) $\{x\in S| \quad ۱<x\le ۴\}=\{x\in S| \quad x^{۲}=۴\} \quad \{۳,۴\}$

۲ــ۶ــ حاصلضرب دکارتی دو مجموعه

دیدید که با اجتماع واشتراک ومتمم‌گیری و تفاضل مجموعه‌های مفروض، مجموعه‌های جدیدی حاصل می‌شوند. حاصلضرب دکارتی دو مجموعه روش دیگری برای ساختن یک مجموعهٔ جدید از مجموعه‌های مفروض است، ولی این کار با استفاده از مفهوم **زوج مرتب** انجام می‌شود. همان طور که خوانده‌اید اگر دستگاه محورهای مختصات در صفحه را در نظر بگیریم هر نقطه از صفحه با یک زوج مرتب منحصر به فردی مانند (x,y) مشخص می‌شود که x و y اعداد حقیقی‌اند و x را مختص یا مؤلّفهٔ اوّل و y را مختص یا مؤلّفهٔ دوم می‌نامیم. معمولاً در صفحهٔ مختصات x را طول و y را عرض نقطهٔ مفروض می‌گویند. به شکل روبرو که نمودار خط $y=-x+۳$ است،توجّه کنید. ملاحظه می‌کنید که نقاط A و B به ترتیب به مختصات $(۱,۲)$ و $(۲,۱)$ با این‌که متعلق به نمودار خط هستند ولی با هم متفاوتند بنابراین دو زوج (x,y) و (y,x) در حالت کلی با هم برابر نیستند.



پس دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) زمانی مساویند که مؤلفه‌های اوّل آنها با هم و مؤلّفه‌های دوّم آنها نیز با هم مساوی باشند. $(c=a)$ و $(b=d)$

مثال ۱: x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتب $(x+y,۶)$ و $(-۵,xy)$ با هم مساوی باشند.

حل: طبق شرط تساوی دو زوج مرتب باید $\begin{cases} x+y=-۵ \\ xy=۶ \end{cases}$ که پس از حل دستگاه $x=-۲$ و $y=-۳$ بدست می‌آید.

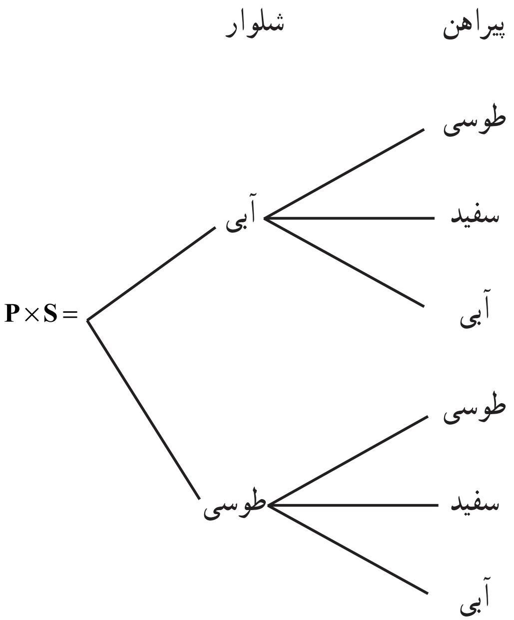
اکنون به مثال زیر توجّه کنید.

اگر شخصی دو شلوار طوسی و آبی و سه پیراهن آبی، سفید و طوسی داشته باشد به شش طریق می‌تواند یک شلوار و یک پیراهن را انتخاب کند :

(طوسی، آبی) و (سفید، آبی)و(آبی،آبی)و(طوسی،طوسی)و(سفید،طوسی)و(آبی،طوسی). ملاحظه می‌کنید برای هر انتخاب یک زوج مرتب تشکیل شده است. اگر {شلوار طوسی، شلوار آبی } = P و {پیراهن آبی، پیراهن سفید، پیراهن طوسی } = S آنگاه مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتّب تشکیل شده را به صورت $P\times S$ نشان می‌دهیم یعنی

$P\times S=$ { (طوسی، آبی) ، (سفید، آبی) ، (آبی، آبی) ، (طوسی، طوسی) ، (سفید، طوسی) ، (آبی، طوسی) }

و نمودار درختی آن به‌صورت زیر است :



(پیراهن، شلوار)

(طوسی،آبی)

(سفید، آبی)

(آبی، آبی)

(طوسی، طوسی)

(سفید، طوسی)

(آبی، طوسی)

به‌عبارتی اگر x را رنگ شلوار و y را رنگ پیراهن بنامیم

$$P\times S=\{(x,y)|\quad x\in P\ ,\ y\in S\}$$

$P\times S$ را حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ P درمجموعهٔ S می‌نامیم. دقّت کنید که چون مؤلفه‌های اوّل زوج‌ها نمایندهٔ شلوار و مؤلّفه‌های دوّم زوج‌ها نماینده پیراهن است ترتیب آن‌ها اهمیّت دارد.

تعریف: *حاصلضرب دکارتی مجموعهٔ A در مجموعهٔ B که با $A\times B$ نشان می‌دهیم، مجموعهٔ همهٔ زوج‌های مرتب (a,b) است که a عضوی از A و b عضوی از B است یعنی :*

$$A\times B=\{(a,b)|\quad a\in A\ ,\ b\in B\}$$

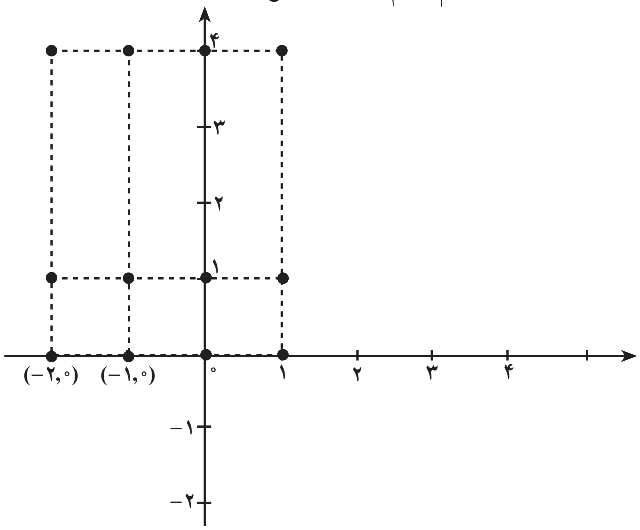
اگر $A=B$ باشد $A\times A$ را با $A^۲$ نشان می‌دهیم و $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ یعنی $\mathbb{R}^۲$ را صفحهٔ مختصات می‌نامیم.

مثال ۲: اگر $A=\{-۱,۰,۱,-۲\}$ و $B=\{۱,۴,۰\}$ ، $A\times B$ را مشخص کنید و نمودار مختصاتی $A\times B$ را رسم کنید.

حل: حاصلضرب دکارتی A در B به‌صورت زیر است :

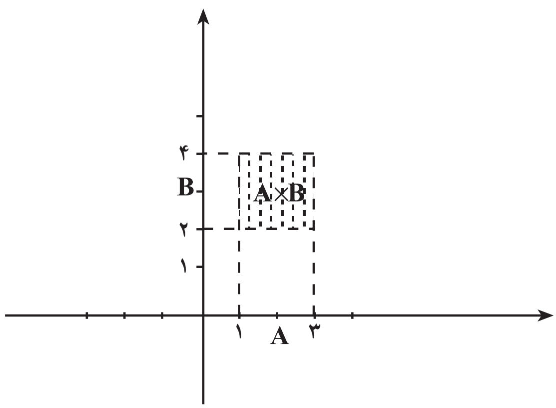
$$A\times B=\{(-۱,۱),(-۱,۴),(-۱,۰),(۰,۱),(۰,۴),(۰,۰),(۱,۱),(۱,۴),(۱,۰),(-۲,۱),(-۲,۴),(-۲,۰)\}$$

برای رسم نمودار مختصاتی $A\times B$ کافی است هر عضو آن را به عنوان مختصات یک نقطه درنظر بگیریم و در صفحهٔ مختصات رسم کنیم. مانند شکل.



مثال ۳: اگر $A=\{x\in\mathbb{R}|\ ۱\le x\le ۳\}$ و $B=\{x\in\mathbb{R}|\ ۲<x<۴\}$ نمودار $A\times B$ را در صفحه نمایش دهید.

حل: $A\times B=\{(x,y)\ |۱\le x\le ۳$ و $۲<y<۴\}$





تمرین

۱ــ x و y را طوری تعیین کنید که زوج‌های مرتّب زیر با هم مساوی باشند.

الف ــ $(\text{۰},\text{۳})$ و $((x-\text{۱})^{\text{۲}}+(y-\text{۱})^{\text{۲}}\ ,\text{۳})$

ب ــ $(\text{۱۳},xy)$ و $(x^{\text{۲}}+y^{\text{۲}},\text{۶})$

۲ــ اگر مجموعهٔ A دارای m عضو و مجموعهٔ B دارای n عضو باشد، مجموعهٔ $A\times B$ چند عضو دارد؟ تعداد زیرمجموعه‌های $A\times B$ چند تاست؟

۳ــ اگر $A=\{\text{۲}k+\text{۱}\mid k\in\mathbb{Z}\ ,\ -\text{۲}\le k\le\text{۰}\}$ و $B=\{y\mid y\in\mathbb{N}\ ,\ y^{\text{۲}}\le\text{۹}\}$

الف ــ $A\times B$ را به صورت زوج‌های مرتّب بنویسید.

ب ــ تعداد اعضای مجموعه‌های $(B\times A)\quad(A\times B)$ و $(B\times A)\quad(A\times B)$ را بنویسید.

ج ــ $A^{\text{۲}}-B^{\text{۲}}$ چند زیرمجموعه دارد؟

۴ــ اگر A و B دو مجموعهٔ غیرتهی باشند درچه شرایطی $A\times B=B\times A$ ؟ و در چه شرایطی $(B\times A)\quad(A\times B)$ تهی است؟

۵ــ اگر شهر B بین دو شهر A و C باشد و برای رفتن از شهر A به شهر B سه راه و برای رفتن از B به C چهار راه موجود باشد به چند طریق یک مسافر می‌تواند از شهر A به شهر C برود؟ به چند طریق می‌تواند برگردد؟ آیا راه‌های رفت و برگشت یکی است؟

۶ــ در پرتاب دو سکهٔ ۲ ریالی و ۵ ریالی با هم، چند زوج مرتب از پشت و روی سکه‌ها حاصل می‌شود؟

۷ــ هریک از مجموعه‌های زیر را در صفحهٔ مختصات نمایش دهید.

الف) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid\ x=y\}$

ب) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid x>y\}$

ج) $\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid\ |x+y|\le\text{۱}\}$

۸ــ حاصلضرب دکارتی هر یک از مجموعه‌های زیر را در دستگاه مختصات رسم کنید.

الف) $A=[-\text{۳},\text{۲}]$ ، $B=(-\text{۲},\text{۰}]$

ب) $A=(\text{۳},.\ )$ ، $B=(-.\ ,-\text{۲})$

ج) $A=[-\text{۲},\text{۲}]$ ، $B=[\text{۱},\text{۲}]$

۹ــ روابط زیر را ثابت کنید.

الف) $A \times B = ./ \qquad A = . \quad$ یا $\quad B = .$

ب) $C \neq . \quad$ و $\quad A \times C = B \times C \ \% \ A = B$

۲ــ۷ــ رابطه

یکی از مهمترین مفاهیم در نظریه مجموعه‌ها، مفهوم رابطه است که نه تنها در تمام ریاضیات بلکه در خارج از ریاضیات نیز کاربرد دارد. عبارات «بزرگتر است از»، «کوچکتر است از»، «عاد می‌کند»، «برابر است با» در اعداد و «زیرمجموعه‌ای است از»، «متعلّق است به»، درمجموعه‌ها و «x برادر y است» ، « x فرزند y است» در مجموعهٔ انسان‌ها، هر یک مثالی از رابطه است آنچه در تمام این مثال‌ها مشترک است این است که همهٔ عبارات به دو شئ اشاره می‌کنند یعنی یک زوج مانند (x,y) و این‌که در هر حالت شئ اوّل با شئ دوم در رابطه هست یا نیست. مثلاً $x > y$ که x و y اعداد حقیقی باشند، یا درست است یا نادرست ($۲ < ۳$ درست است ولی $۳ < ۲$ نادرست).

بنابراین $x > y$ کاملاً با $y > x$ متفاوت است یعنی $(x,y) \neq (y,x)$ (مفهوم زوج مرتّب) پس هر رابطه را می‌توان مجموعه‌ای از زوج‌های مرتّب در نظر گرفت. از طرفی هرکدام از روابط در مجموعهٔ مشخصی تعریف شده‌اند مانند مجموعهٔ اعداد، مجموعهٔ انسان‌ها و ... حتماً دقت کرده‌اید که مثلاً $x > y$ یک گزاره‌نما در مجموعهٔ اعداد است.

پس می‌توان رابطهٔ «x بزرگتراست از y» در اعداد حقیقی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتّب به‌صورت $\{(x,y) | x > y\}$ در نظر گرفت.

مثال ۱: فرض کنیم مجموعهٔ عام مجموعهٔ انسان‌ها و گزاره‌نمای $p(x,y)$ به معنی «x پدر y است» باشد بنابراین رابطهٔ پدری در مجموعهٔ انسان‌ها چنین است :

رابطهٔ پدری $= \{(x,y) \mid$ x پدر y است $\}$

یا

رابطهٔ پدری $= \{(x,y) \mid p(x,y)\}$

بنابراین **شرط** این‌که حسن پدر تقی باشد آن است که زوج مرتب (تقی ، حسن) متعلّق به مجموعهٔ رابطهٔ پدری باشد.

پس می‌توان رابطه را به کمک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتّب تعریف کرد، یک راه ساختن زوج‌های مرتّب به کمک ضرب دکارتی مجموعه‌هاست.

تعریف: *فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند هر زیرمجموعه از حاصلضرب دکارتی $A\times B$ رابطه‌ای از A در B است. اگر رابطه را با R[1] نشان دهیم،* $R \subseteq A\times B$

جملهٔ «از A در B» یعنی اوّلین مؤلّفه‌های زوج‌های مرتّب، عضوهای A و دومین مؤلّفه‌های زوج‌های مرتّب عضوهای B می‌باشند.

اگر $A = B$ ، گوییم R رابطه‌ای روی A است.

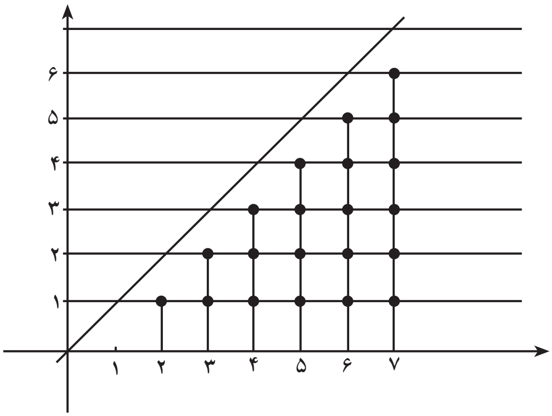
اگر $a\in A$ و $b\in B$ گوییم a با b توسط R در رابطه هستند هرگاه $(a,b)\in R$ ، متداولتر است که نماد aRb را به معنی $(a,b)\in R$ به کار ببریم. در صورتی که $(a,b) \notin R$ می‌نویسیم $a \not R b$

مثال ۲: فرض کنیم، $\mathbb{Z}$ مجموعهٔ عام باشد یکی از مهمترین رابطه‌های ریاضی رابطهٔ عادکردن در $\mathbb{Z}$ است که با علامت «|» نمایش داده می‌شود اگر بنویسیم: $a|b$ یعنی عدد صحیحی مانند c هست که $b = ac$.

مثلاً $-۳|۶$ ، $۲|۶$ ، $۳|-۶$ که $-۳|۶$ معادل $-۳R۶$ یا معادل $(-۳,۶)\in R$ است پس $a|b$ معادل aRb است که به صورت $a|b$ / aRb یا $R = \{(a,b)|\ a,b\in \mathbb{Z}, a|b\}$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳: فرض کنیم $A = \{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷\}$ رابطهٔ «>» را روی A در نظر می‌گیریم یعنی $(a,b)\in R$ معادل است با $a > b$ برای نمایش این رابطه ابتدا حاصلضرب دکارتی $A\times A$ را به‌دست می‌آوریم. و روی مختصات دکارتی مشخص می‌کنیم.

$$A\times A = \{(۱,۱),(۱,۲),\ldots,(۱,۷),(۲,۱),\ldots,(۲,۷),\ldots,(۷,۷)\}$$



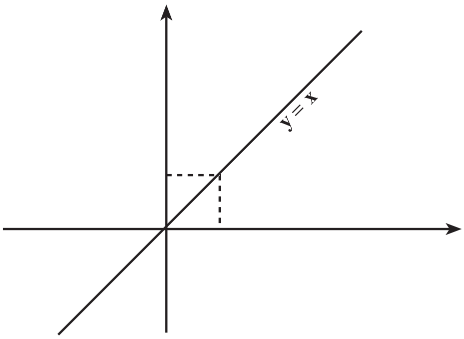
روی شکل، زیرمجموعهٔ $A\times A$ که با نقاط پررنگ مشخص شده‌اند، نمودار رابطهٔ R می‌باشد که $R = \{(۲,۱),(۳,۱),\ldots,(۷,۱),(۳,۲),(۴,۲),(۴,۳)\ldots,(۷,۶)\}$

۱ـ Relation

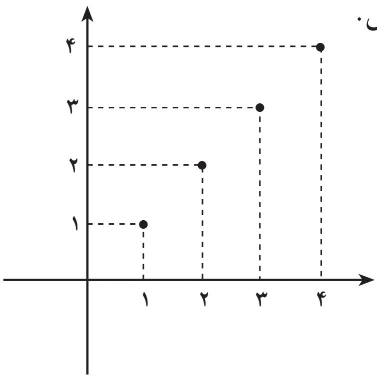
مثال ۴: فرض کنیم رابطهٔ تساوی روی $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=x\}$$

نمودار مختصاتی این رابطه خط راست $y=x$ است که نیمساز ربع اوّل و سوم دستگاه مختصات است.



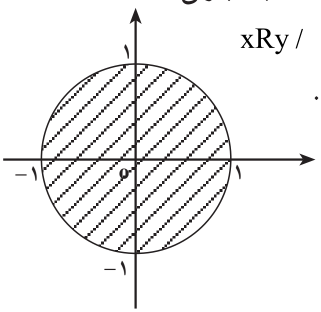
تذکر: اگر $A=\mathbb{N}$ رابطهٔ تساوی فقط نقاطی از خط $y=x$ می‌باشند که مؤلّفه‌های صحیح مثبت داشته باشند مانند شکل.



مثال ۵: در صفحه xoy رابطه R را چنین تعریف می‌کنیم که x با y در رابطه است اگر (x,y) نقطه‌ای در داخل یا روی دایرهٔ واحد باشد یعنی $x^2+y^2\le 1$ به عبارتی

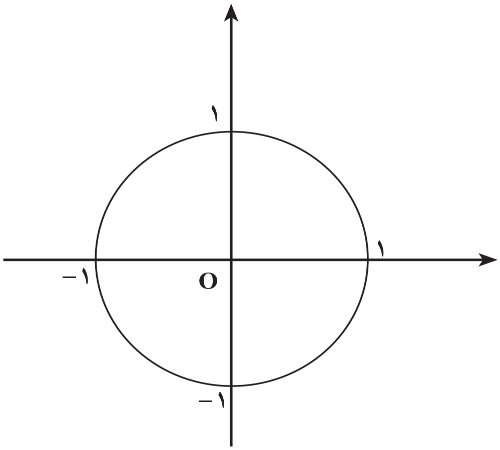
$$xRy \,/\quad x^2+y^2\le 1$$

بنابراین نمودار این رابطه قرصی به‌شکل زیر است.

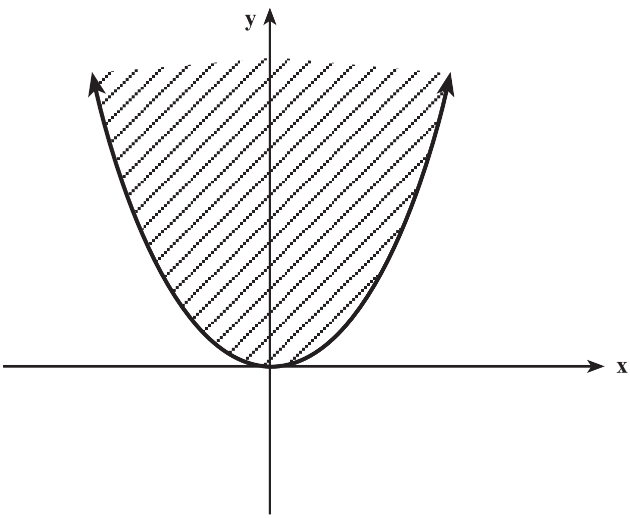


با توجه به مثال‌ها، تاکنون متوجه شده‌اید که کلیّهٔ معادلات و نامعادلات (نامساوی‌ها) دو متغیّره‌ای که قبلاً خوانده‌اید می‌توانند به عنوان رابطه در نظر گرفته شوند.

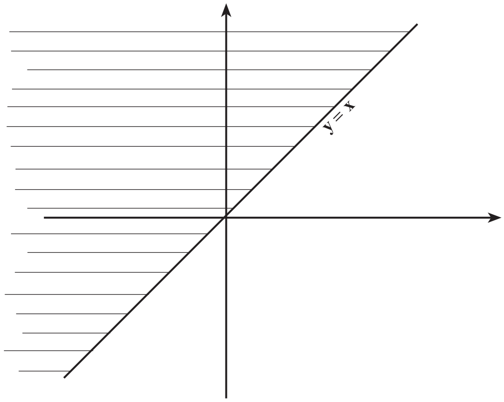
مثال ۶: نمودار رابطهٔ $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^۲|\ x^۲+y^۲=۱\}$ یک دایره به شعاع ۱ است که مرکز آن $O(۰,۰)$ می‌باشد.



مثال۷: نمودار رابطهٔ $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^۲|\ y\geq x^۲\}$ نقاط مرز و داخل سهمی $y=x^۲$ می‌باشد. مانند شکل



مثال ۸: نمودار رابطهٔ «≤» در اعداد حقیقی یعنی رابطهٔ $R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^۲ \mid x\le y\}$ سطح یک نیم صفحه است. (ناحیه سایه‌دار در شکل زیر)





تمرین

۱ــ رابطهٔ $R=\{(۱,.),(۰,۲),(.,۱),(۲,۲)\}$ در $A=\{۰,۱,.,۲,۴\}$ تعریف شده است .

الف ــ تحقیق کنید کدام یک از موارد زیر درست است؟

$۴R۱$ ، $۲R۰$ ، $۱R.$ ، $.R۱$ ، $۱R۲$

ب ــ مجموعهٔ اعضایی از A که با ۲ رابطه دارند را مشخص کنید.

۲ــ چند رابطه در مجموعهٔ A از تمرین ۱ می‌توان نوشت؟

۳ــ آیا . یک رابطه است؟

۴ــ در مجموعهٔ $A=\{۰,۱,۲,\dots,۹\}$ رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x,y\in A, x|y\}$ تعریف شده است R را به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب بنویسید، دامنه و برد R را تعیین کنید.

۵ــ اعضای رابطهٔ $R=\{(x,y)\mid x^۲+y^۲=۴\}$ را در $\mathbb{Z}$ به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۶ــ اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ نمودار رابطه‌های زیر را رسم کنید .

الف) $a,b\in A \quad aRb / \quad a+b\le ۴$

ب) $aRb / \quad a(b+۱)\le ۶$

ج) $aRb / \quad -۱۰\le a+۵b\le ۱۰$

د) $xRy / \quad x^۲+y^۲\le ۴$

۷ــ رابطهٔ f از $\mathbb{R}$ در فاصلهٔ بستهٔ $[۰,۱]$ به صورت $y=\frac{۱}{x^{۲}+۱} \quad / \ xfy$ تعریف شده است نمودار رابطهٔ f را رسم کنید.

۸ــ رابطه‌های زیر روی مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۶\}$ تعریف شده‌اند اولاً هر رابطه را به صورت زوج‌های مرتّب نشان دهید ثانیاً نمودار رابطه‌ها را رسم کنید.

$$R_{۱}=\{(x,y)|\ x|y\} \quad , \quad R_{۲}=\{(x,y)|\ x<y\}$$

$$R_{۳}=\{(x,y)|\ x=y\} \quad , \quad R_{۴}=\{(x,y)|\ x\neq y\}$$

$$R_{۵}=\{(x,y)|\ x^{۲}\leq y\} \quad , \quad R_{۶}=\{(x,y)|\ \text{فرد است}\ \ x+y\}$$

۹ــ رابطه‌های زیر روی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعریف شده‌اند نمودار آن‌ها را رسم کنید.

$$R_{۱}=\{(x,y)\ |\ x^{۲}+y^{۲}\leq ۴\}$$

$$R_{۲}=\{(x,y)\ |\ x^{۲}+y^{۲}\leq ۱\ ,\ y\geq x\}$$

$$R_{۳}=\{(x,y)\ |\ |x|=|y|\}$$

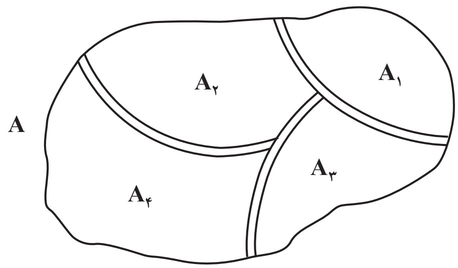
$$R_{۴}=\{(x,y)\ |\ |y|=-x\}$$

۲ــ۸ــ افراز یک مجموعه

مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ را به صورت $\mathbb{Z}=\{...,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,...\}$ در نظر می‌گیریم.
این مجموعه را می‌توان به دو زیرمجموعهٔ اعداد فرد و اعداد زوج تقسیم کرد. مسلماً $\mathbb{Z}_O \quad \mathbb{Z}_E=.$ زیرا هیچ عددی نمی‌تواند هم زوج و هم فرد باشد و $\mathbb{Z}_O \quad \mathbb{Z}_E=\mathbb{Z}$ ، این تقسیم را افراز $\mathbb{Z}$ به دو مجموعهٔ $\mathbb{Z}_E$ و $\mathbb{Z}_O$ می‌نامیم همچنین هرمجموعهٔ A با متمم خود یعنی A' یک افراز برای مجموعهٔ عام U می‌باشند زیرا :

$$A \quad A'=. \quad \text{و} \quad A \quad A'=U$$

می‌توان این ایده را تعمیم داد. در شکل زیر مجموعهٔ A به چهار مجموعهٔ $A_{۱}$ و $A_{۲}$ و $A_{۳}$ و $A_{۴}$ افراز شده است.



تعریف: فرض کنیم A یک مجموعهٔ غیر تهی باشد گوییم A به n زیرمجموعهٔ $A_۱$ و $A_۲$ و ... و A_n افراز شده است اگر:

الف ــ برای هر $۱ \le i \le n$, $A_i \neq .$

ب ــ برای هر $i \neq j$ $A_i \quad A_j = .$ $(۱ \le j \le n)$

ج ــ $A_۱ \quad A_۲ \quad ... \quad A_n = \quad {}_{i=۱}^{n} A_i = A$

مثال: اگر $A = \{۱, ۲, ۳\}$ آنگاه A دارای ۵ افراز به صورت زیر است:

(۱) $\{۱\}, \{۲\}, \{۳\}$

(۲) $\{۱\}, \{۲, ۳\}$

(۳) $\{۲\}, \{۱, ۳\}$

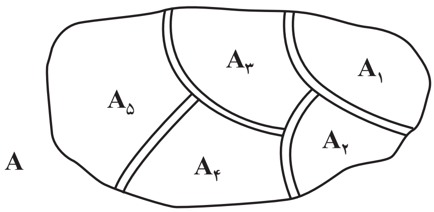
(۴) $\{۳\}, \{۱, ۲\}$

(۵) $\{۱, ۲, ۳\}$

۲ــ۹ــ رابطهٔ هم ارزی

مثال: فرض کنیم که مجموعهٔ A به قطعات مجزای از یکدیگر مانند شکل، افراز شده باشد می‌توانیم رابطهٔ «~» را چنین تعریف کنیم.

x و y هر دو در یک قطعه هستند $x \sim y /$



برای داشتن شهودی بهتر فرض کنید A نقشهٔ یک کشور باشد و زیرمجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ و $A_۴$ و $A_۵$ استان‌های این کشور باشند رابطه‌ای که بین هر دو شهروند این کشور برقرار است رابطهٔ هم‌استانی بودن است. یعنی

x و y در یک استان هستند $x \sim y /$

بنابراین اگر x متعلق به استان $A_۱$ است و y متعلق به استان $A_۲$، x و y رابطه‌ای باهم ندارند.

این رابطه دارای این خواص است که اگر x و y و z افرادی از این کشور باشند :

۱ــ x با خودش هم‌استان است.

۲ــ اگر x با y هم‌استان باشد y نیز با x هم‌استان است.

۳ــ اگر x با y و y با z هم‌استان باشند، x نیز با z هم‌استان است.

برعکس می‌توانیم ناحیه‌ها را با رابطهٔ «~» بازسازی کنیم. ناحیه‌ای که x متعلق به آن است (استانی که x در آن زندگی می‌کند) با E_x نمایش می‌دهیم. که عبارت است از :

$$E_x = \{y \in A | \ x \sim y\}$$

یعنی استانی که x متعلق به آن است مجموعهٔ تمام شهروندان کشور A است که با x در یک استان زندگی می‌کنند. یعنی مجموعهٔ E_x یکی از استان‌های کشور است یا یکی از ناحیه‌های مورد نظر است. بنابراین اگر $x \in A_۲$ باشد آنگاه $E_x = A_۲$ و اگر $x \in A_۵$ آنگاه $E_x = A_۵$ پس دقیقاً رابطهٔ هم‌استانی بودن، کشور را به استان‌ها تقسیم می‌کند. به طور کلّی می‌توان گفت : رابطه‌ای که دارای خواص (۱) و (۲) و (۳) باشد یک رابطه هم‌ارزی است.

تعریف: *رابطه‌ای چون «~» روی مجموعهٔ A یک رابطهٔ هم‌ارزی است اگر به ازای هر x و y و z از A سه خاصیت زیر برقرار باشد :*

الف ــ $x \sim x$ یعنی هر عضو با خودش رابطه داشته باشد. (بازتابی یا انعکاسی)

ب ــ اگر $x \sim y$ آنگاه $y \sim x$ (تقارنی)

ج ــ اگر $x \sim y$ و $y \sim z$ آنگاه $x \sim z$ (تعدی یا تراگذری)

مثال : رابطهٔ توازی خطوط در صفحه و رابطهٔ همنهشتی دو مثلث رابطه‌های هم‌ارزی روی صفحه هستند.

ملاحظه کردید که هرگاه مجموعهٔ A را به قطعات مجزا تقسیم کنیم، رابطهٔ (x هم‌استان است با y) یک رابطه‌ای هم‌ارزی است و برعکس. بنابراین

هر رابطهٔ هم ارزی روی یک مجموعه آن مجموعه را به زیرمجموعه‌های مجزا که هر یک از آنها دسته یا کلاس هم‌ارزی نامیده می‌شود تقسیم می‌کند.

دستهٔ هم‌ارزی a را با علامت [a] نشان می‌دهیم. a را نمایندهٔ دسته می‌گوییم و به صورت $[a] = \{x \ | \ xRa\}$ تعریف می‌کنیم.

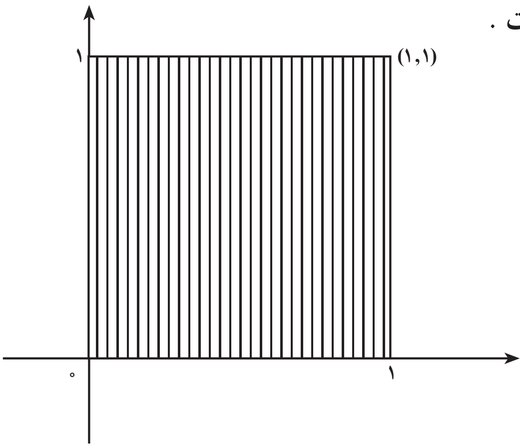
مثال: سطح مربع واحد $D=[۰,۱]\times[۰,۱]$ را در نظر بگیرید هر دو نقطه از این مربع را با رابطهٔ این‌که مؤلّفه‌های اوّل آن‌ها با هم برابرند تعریف می‌کنیم یعنی :

$$(x,y)R(a,b) / \quad x=a$$

این رابطه یک رابطهٔ هم‌ارزی روی D است. و مجموعهٔ D (صفحهٔ D) را به دسته‌های هم‌ارزی افراز می‌کند، دسته‌های هم‌ارزی خطوط عمود بر محور xها می‌باشند زیرا مثلاً دستهٔ $(۰,۰)$ عبارت است از :

$$[(۰,۰)]=\{(x,y) \mid (x,y)R(۰,۰)\}$$
$$=\{(x,y) \mid x=۰\}$$

که نمودار آن خط $x=۰$ است .





تمرین

۱ــ رابطهٔ R در $\mathbb{Z}$ به‌صورت

$$xRy \ / \quad ۳|x-y$$

تعریف شده است. اولاً ثابت کنید R یک رابطهٔ هم‌ارزی است. ثانیاً رابطهٔ R مجموعهٔ $\mathbb{Z}$ را به چند کلاس هم‌ارزی افراز می‌کند ؛ این کلاس‌های هم‌ارزی را مشخص کنید.

۲ــ ثابت کنید رابطهٔ تشابه دو مثلث، یک رابطهٔ هم‌ارزی است.

۳ــ از رابطه‌های زیر که روی $\mathbb{R}^۲$ تعریف شده‌اند کدام‌یک هم‌ارزی است؟

الف) $(a,b)R(c,d) \ / \quad a+d=b+c$

ب) $(a,b)R(c,d) \ / \quad (a-c)(b-d)=۰$

پ) $(a,b)R(c,d) \ / \quad ab=cd$

فصل ۳

احتمال و پدیده های تصادفی

هنگامی که علم احتمالات هنوز دوران طفولیت خود را سپری می‌کرد، **لاپلاس** ریاضیدان معروف فرانسوی ــ مشهور به نیوتن فرانسه ــ گفت : «علم احتمالات که برای بررسی بازی‌های شانس مطرح شده، بایستی به مهمترین هدف دانش بشری تبدیل گردد.... در بخش اعظم زندگی، مهمترین سؤالاتی که مطرح می‌شوند در واقع فقط مسائل احتمالات هستند». [راس[1] ،۱۹۷۶،ص۷] هر چند بیان فوق ممکن است اغراق‌آمیز به نظر برسد، ولی خود حقیقتی است زیرا همان‌طور که ریاضیدان برجستهٔ قرن بیستم **مارک کتز**[2] می‌گوید :«نظریهٔ احتمالات سنگ بنای تمام علوم شمرده می‌شود.»[به نقل از جیکوب[3] ،۱۹۸۲،ص۴۲۴] تقریباً تمام شاخه‌های دانش بشری از فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، مهندسی و پزشکی گرفته تا قضاوت، جامعه شناسی، اقتصاد، و ... احتمالات را به‌عنوان یکی از ابزارهای اساسی خود درنظر می‌گیرند. چون بررسی درستی یک مطلب در مسایل مختلف همیشه امکان‌پذیر نیست درنتیجه برای انسان متفکر و جستجوگر این عصر، **احتمال درستی** یک مطلب بیش از **درستی** خود مطلب اهمیت می‌یابد. تاریخچهٔ علم احتمالات به قرن شانزدهم میلادی باز می‌گردد، یعنی زمانی که ریاضیدان و پزشک ایتالیایی **کاردانو**[4] (۱۵۷۶ــ ۱۵۰۱) به بررسی معارف ریاضی زمان خود که شامل تحلیل سازمان یافتهٔ مسئلهٔ بازی‌های مبتنی بر شانس بود پرداخت. درسال ۱۶۵۴، پاسکال ریاضیدان معروف فرانسوی به مسئلهٔ شانس و بازی‌ها علاقمند شد و نتیجهٔ مطالعات خود را با ریاضیدان مشهور دیگر **فرما**[5] (۱۶۶۵ــ ۱۶۰۱) در میان گذاشت . در نتیجه مطالعهٔ **احتمالات ریاضی** با بررسی مسائل مربوط به بازی‌های شانسی متولد شد. علیرغم این تولد مبتنی بر تفنن، اکنون پس از گذشت چند سده احتمالات به یک رشتهٔ کاملاً ضروری و مورد نیاز تبدیل شده است. نظریهٔ احتمالات به **علم عدم قطعیت** نیز مشهور است. منظور از**عدم قطعیت** این است که در حیطهٔ احتمالات از قوانین پیش‌بینی کننده که به طور قطع وقوع پدیده‌هایی را در کنترل داشته باشد سخن نمی‌گوییم. به‌عنوان مثال در پرتاب سکه نمی‌توانیم به طور قطع بگوییم رو یا پشت سکه نمایان خواهد شد با این حال اگر این پرتاب را بارها تکرار کنیم، نسبت دفعات مشاهدهٔ پشت و یا

۱ــ Ross ۲ــ Mark Katz ۳ــ Jacob ۴ــ Cardano ۵ــ Fermat

روی سکه به کل دفعات آزمایش در دراز مدت تقریباً قابل پیش‌بینی است. پرداختن به این نسبت‌ها در حیطهٔ **نظریهٔ احتمال** است.

۳ــ۱ــ پدیده‌های تصادفی

نیوتن با مشاهدهٔ افتادن سیب از درخت متوجّه قانون جاذبه شد. زیرا تکرار این پدیده و قطعی بودن نتیجه، این باور را در او تقویت کرد که حتماً باید جاذبه‌ای وجود داشته باشد تا بتوان افتادن سیب را به طور قطع توجیه کرد. همچنین اگر سنگریزه‌ای را از یک بلندی رها کنیم بالاخره پس از مدّتی به زمین اصابت خواهد کرد. مثال‌هایی از قبیل مشاهدهٔ **افتادن سیب از درخت** و یا آزمایش **رها کردن سنگریزه** نمونه‌هایی از پدیده‌های قطعی هستند.

با فرض یکسان بودن شرایط، در پدیده‌های قطعی، نتیجهٔ آزمایش و یامشاهده را قبل از وقوع ***می‌توان*** *به طور قطع مشخّص کرد.*

پدیده‌های دیگری نیز وجود دارند که مشاهدهٔ تکراری آن‌ها تحت شرایط مشخّص همیشه به نتیجهٔ یکسانی ختم نمی‌شود. یک مثال آشنا در این مورد پرتاب سکّه است. اگر یک سکّه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم افتادن سکّه به رو یا به پشت از قبل قابل پیش‌بینی نیست[۱]، یعنی نمی‌توانیم بگوییم مثلاً در پنجاهمین بار سکّه به رو می‌افتد یا به پشت. این نوع پدیده‌ها که آن‌ها را **تصادفی** می‌نامیم در این فصل مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

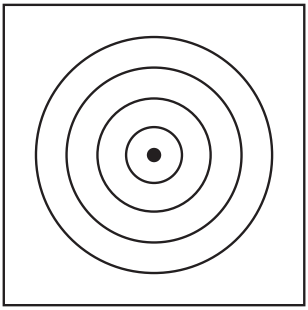
طیف وسیعی از پدیده‌هایی که در جهان اطراف ما وجود دارند دارای ماهیّت تصادفی هستند. شما نیز در محیط آموزشی خود ناظر پدیده‌های بیشماری با ماهیّت تصادفی هستید. به عنوان مثال اتومبیل‌هایی که در ساعت‌های مشخّصی از مقابل مدرسهٔ شما می‌گذرند، میانگین طول عمر دانش‌آموزان هر کلاس، کشیدن قرعه از بین کارت‌هایی که نام دانش‌آموزان کلاس بر آن‌ها نوشته شده است، تعیین موقعیّت مکانی یک دانش‌آموز خاصّ در زمین فوتبال، تعداد افراد چپ دست در هر کلاس، تعداد دانش‌آموزانی که در هر زنگ تفریح زمین می‌خورند، تعداد نمرات ۲۰ در درس فیزیک در هر سال و میانگین قد دانش‌آموزانِ هر کلاس نمونه‌هایی از پدیده‌های تصادفی هستند.

ملاحظه می‌کنید که وقوع بعضی از پدیده‌ها مانند **تعداد اتومبیل‌هایی که در ساعت مشخّصی**

۱ــ در نشستن یک سکّه طرفی که عدد نوشته شده است را **پشت** و طرف دیگر را **رو** نامیده و آن‌ها را به ترتیب با «پ» و «ر» نشان می‌دهیم.

از مقابل مدرسه می‌گذرند را از طریق **مشاهده** و وقوع بعضی دیگر مانند **پرتاب سکّه** و یا **کشیدن قرعهٔ نام دانش‌آموزان** را از طریق **آزمایش** نظاره می‌کنیم.

*با فرض یکسان بودن شرایط، در پدیده‌های تصادفی، نتیجهٔ آزمایش و یا مشاهده را قبل از وقوع **نمی‌توان** به طور قطع مشخّص کرد.*



برای بهتر آشنا شدن با پدیده‌های تصادفی، به مثال زیر توجّه کنید.

مثال ۱: بر روی صفحه‌ای تعدادی دایرهٔ متحدالمرکز مطابق شکل روبرو رسم می‌کنیم:

سطح دایره‌های متحدالمرکز درون صفحهٔ مذکور را به‌عنوان هدف‌های تیراندازی مورد استفاده قرار می‌دهیم به‌طوری که هر قدر تیر به دایرهٔ کوچکتر نزدیکتر باشد، امتیاز بیشتری نصیب تیرانداز می‌شود. همچنین سطح بزرگترین دایره را **صفحهٔ هدف** می‌نامیم. در چنین شرایطی، اگر فرض کنیم تیری که به سمت هدف پرتاب شده است حتماً به صفحهٔ هدف برخورد خواهد کرد، با این حال قبل از اصابت تیر به هدف، تشخیص این‌که تیر به کدام دایره برخورد خواهد کرد ممکن نیست.



۱ــ چند نمونه از پدیده‌های قطعی که در درس‌های فیزیک و شیمی با آن‌ها آشنا شده‌اید را بنویسید.

۲ــ چند نمونه از پدیده‌های تصادفیِ محیط اطرافتان را بازگو کنید.

۳ــ ۲ــ فضاهای نمونه‌ای

در بررسی شانس وقوع آزمایش‌های تصادفی، همانند بسیاری دیگر از مفاهیم ریاضی ناگزیر از مدلسازی هستیم. انجام این کار در قالب سه مرحلهٔ زیر صورت می‌گیرد:

۱ــ تعیین فضای نمونه‌ای **مناسب** ؛

۲ــ مشخص کردن پیشامد مورد بررسی ؛

۳ــ اندازه‌گیری شانس وقوع پیشامد در فضای نمونه‌ای **مربوطه**(احتمال).

چنانکه مشاهده می‌شود، نخستین مرحله تعیین فضای نمونه‌ای **مناسب** است. (مرحلهٔ دوم و مرحلهٔ سوم در فصل آینده مورد بحث قرار خواهند گرفت.) بدین منظور نخست به تعریف مفهوم فضای نمونه‌ای در آزمایش‌های تصادفی می‌پردازیم .

مثال ۲ : یک سکه به هوا پرتاب می‌شود. این سکه در فرود آمدن بر روی زمین یا رو «ر» می‌آید و یا پشت «پ». بنابراین مجموعهٔ تمام نتایج (برآمدهای) ممکن آزمایش پرتاب سکه، مجموعهٔ دو عضوی {ر , پ} است،که فضای نمونه‌ای ما را در این مثال تشکیل می‌دهد.

مثال ۳ : یک تاس[1] ریخته می‌شود. بعد از نشستن این تاس یکی ازاعداد ۱ تا ۶ به‌دست خواهد آمد. بنابراین، تمام برآمدهای ممکن این آزمایش یعنی فضای نمونه‌ای این مثال را می‌توان به‌صورت مجموعهٔ ۶ عضوی

$$\{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$$

نشان داد.

*مجموعهٔ تمام نتایج (برآمدهای) ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را **فضای نمونه‌ای** آن پدیده نامیده و معمولاً آن‌را با S نشان می‌دهیم.*

در مثال‌های فوق فضاهای نمونه‌ای به‌ترتیب$\{پ , ر\} = S_۱$ و $S_۲ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ هستند که مجموعه هایی متناهی‌اند. به چنین فضاهایی، **فضای نمونه‌ای گسسته**[2] گفته می‌شود. حال به مثال‌های زیر توجه کنید و ببینید آیا فرقی بین فضاهای نمونه‌ای مثال‌های فوق با این مثال‌ها وجود دارد؟ دربارهٔ آن‌ها فکر کنید.

مثال ۴ : می‌خواهیم طول عمر یک ترانزیستور را برحسب ساعت اندازه‌گیری کنیم. با توجه به این‌که طول عمر ترانزیستور می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت و درصورت خراب بودن صفر باشد لذا برآمدهای ممکن اعداد حقیقی مثبت یا صفر خواهد بود. پس این فضا را می‌توان به‌صورت

۱ــ تاس، مکعبی است که روی وجوه آن به ترتیب اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است.

۲ــ فضاهای گسسته به مجموعه‌های متناهی یا نامتناهی شمارش‌پذیر (countable) گفته می‌شود. با این حال در این کتاب فضای نمونه‌ای گسسته فقط به فضای نمونه‌ای متناهی اطلاق می‌شود.

$$S=\{x\in\mathbb{R} \quad : \quad x\geq 0\}$$

که در آن x نشان‌دهندهٔ طول عمر ترانزیستور است نوشت.

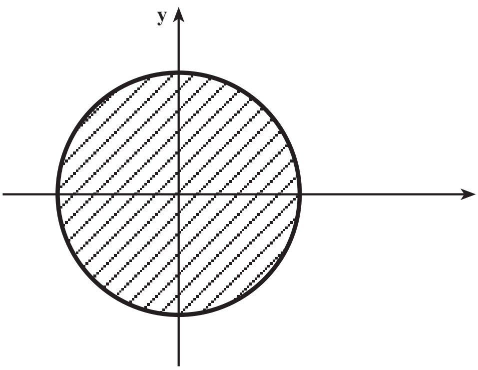
چنان‌که مشاهده می‌شود، فضای نمونه‌ای مربوط به این مسئله برخلاف مثال‌های قبلی نامتناهی است زیرا تمام اعداد حقیقی مثبت را شامل می‌شود.

مثال ۵: تیراندازی به هدف را درنظر بگیرید. محل برخورد تیر به دایره‌های متحدالمرکز یعنی هدف ممکن است نقطه‌ای ازمیان تمام نقاط واقع بر سطح دایره‌ها باشد. درنتیجه فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی همان صفحهٔ هدف یعنی سطح بزرگترین دایره است که می‌توان آن‌را به‌صورت صفحه‌ای دایره‌ای شکل به مرکز مبدأ مختصات و شعاع بزرگترین دایره واقع بر صفحهٔ هدف تصور کرد.

با توجه به معادلهٔ دایره، فضای نمونه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | \quad x^2+y^2\leq r^2\}$$

که در آن x و y مختصات نقاط واقع بر صفحه و r شعاع دایرهٔ مذکور می‌باشند (شکل زیر).



فضاهای نمونه‌ای مثال‌های ۴ و ۵ از ویژگی خاصی برخوردارند. فضای نمونه‌ای مثال ۴ یعنی $S=\{x : \quad 0\leq x< .\ \}$ بازه‌ای از اعداد حقیقی و فضای نمونه‌ای مثال ۵ یعنی $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2\leq r^2\}$ یک شکل هندسی ــ قسمت هاشور خورده ــ می‌باشد. این نوع فضاهای نمونه‌ای را **پیوسته** می‌نامیم.

***فضای نمونه‌ای پیوسته** یک مجموعهٔ نامتناهی به‌صورت بازه‌هایی از اعداد حقیقی و یا اشکال و احجام هندسی می‌باشند.*

فضاهای نمونه‌ای اندازه‌گیری‌های فیزیکی از قبیل دما، شتاب و فشار از نوع فضاهای نمونه‌ای پیوسته هستند.



تمرین

۱ــ یک سکه را دوبار به هوا می‌اندازیم، فضای نمونه این آزمایش چیست؟

۲ــ یک تاس و یک سکه را با هم به هوا می‌اندازیم، فضای نمونه‌ای این آزمایش را بنویسید.

۳ــ۳ــ پیشامدهای تصادفی

در ریختن تاس، فضای نمونه‌ای مجموعهٔ $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است اگر به‌عنوان مثال در این آزمایش، رو شدن یک عدد فرد مورد نظر باشد، مجموعهٔ $A=\{۱,۳,۵\}$ که تمام نتیجه‌های مطلوب در این آزمایش را نشان می‌دهد، یک **پیشامد تصادفی** فضای نمونه‌ای مورد بحث نامیده می‌شود. در حقیقت، هر زیرمجموعه دیگری از فضای نمونه‌ای S نیز دارای همین خاصیت می‌باشد. یعنی، هر زیرمجموعه از فضای نمونه‌ای گسسته یک پیشامد تصادفی است[1]. در این کتاب هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای را یک پیشامد درنظر می‌گیریم. پیشامد A زمانی رخ می‌دهد که برآمد آزمایش عضوی از آن باشد.

*هر زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای را یک **پیشامد** می‌نامیم.*

مثال ۶: در فضای نمونه‌ای ریختن تاس، پیشامد A را روشدن عددی می‌گیریم که بر ۳ بخش‌پذیر باشد، پس $A=\{۳,۶\}$.

مثال ۷: یک تاس قرمز و یک تاس سبز را با هم می‌ریزیم. اولاً فضای نمونه‌ای این آزمایش را پیدا کنید، ثانیاً اگر پیشامد B ظاهر شدن دو عدد با مجموع ۷ بر روی تاس‌ها باشد، این پیشامد را توصیف نمایید.

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش حاصلضرب دکارتی S (فضای نمونه‌ای ریختن یک تاس) در خودش است، یعنی :

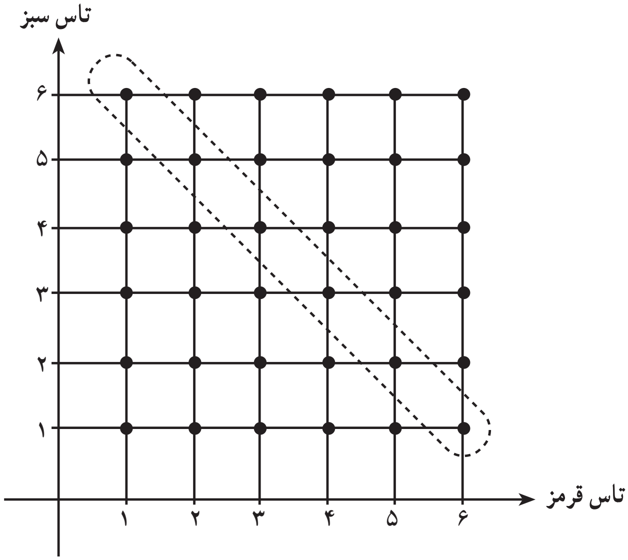
$$S_۱=S\times S=\{(x,y)|x=۱,۲,۳,\dots,۶,y=۱,۲,۳,\dots,۶\}$$

جواب قسمت دوم مسأله عضوی از زیرمجموعهٔ زیر از فضای نمونه‌ای $S_۱$ است :

$$B=\{(۱,۶) و (۲,۵) و (۳,۴) و (۴,۳) و (۵,۲) و (۶,۱)\}$$

۱ــ با وجود این، حالت‌های پیچیده‌ای در فضاهای نمونه‌ای پیوسته وجود دارند که پیشامد محسوب نمی‌شوند.

در شکل، پیشامد مورد بحث عبارت است از مجموعه نقاط داخل نقطه‌چین.



مثال ۸: یک سکه دو بار به هوا پرتاب می‌شود. فضای نمونه‌ای مربوط به این دو پرتاب را توصیف کرده و پیشامد تصادفی ظاهر شدن **رو** (ر) در هر دو پرتاب یا **پشت** (پ) در هر دو پرتاب را مشخص کنید.

حل: فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه $S_1 =$ {پ ,ر} می‌باشد، پس فضای نمونه‌ای دو بار پرتاب برابر حاصلضرب دکارتی مجموعه S_1 در خودش است.

یعنی :

بار اوّل \ بار دوم	ر	پ
ر	(ر و ر)	(ر و پ)
پ	(پ و ر)	(پ و پ)

بنابراین فضای نمونه‌ای عبارت است از :

$S = S_1 \times S_1 =$ { (ر،ر) , (ر،پ) , (پ،ر) , (پ،پ) }

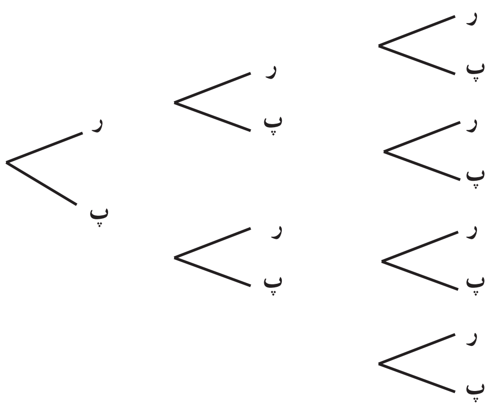
در این آزمایش، پیشامد تصادفی A یعنی ظاهر شدن (ر) در هر دو بار و یا (پ) در هر دو بار، چنین نمایش داده می‌شود :

$A =$ { (ر،ر) , (پ،پ) }

مثال ۹: یک سکه سه بار پرتاب می‌شود. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را مشخص کرده و پیشامد A که در آن هر سه بار پشت بیاید و پیشامد B که در آن فقط یک بار پشت بیاید را معیّن کنید.

حل: در این آزمایش، عضوهای فضای نمونه‌ای به صورت زیر مشخص می‌شوند :

برآمدهای ممکن	بار سوم	بار دوم	بار اول



(ر,ر,ر)
(ر,ر,پ)
(ر,پ,ر)
(ر,پ,پ)
(پ,ر,ر)
(پ,ر,پ)
(پ,پ,ر)
(پ,پ,پ)

پس فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی به قرار زیر است :

S = { (ر,ر,ر) , (ر,ر,پ) , (ر,پ,ر) , (ر,پ,پ) و
(پ,ر,ر) , (پ,ر,پ) , (پ,پ,ر) , (پ,پ,پ) }

در این فضای نمونه‌ای، پیشامدهای A و B عبارتند از :

A = { (پ,پ,پ) } ؛ B = { (پ,ر,ر) , (ر,پ,ر) , (ر,ر,پ) }

بایستی توجه شود سه مرحله‌ای که برای مدلسازی آزمایش‌های تصادفی شرح داده شد، کلیت ندارد ؛ یعنی لازم نیست که همیشه اول فضای نمونه‌ای مناسب را پیدا کرد و بعد به مشخص کردن پیشامد مورد بررسی پرداخت ؛ زیرا اولاً فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی یگانه نیست و بستگی به مدلی دارد که ما از آن پدیده می‌سازیم. ثانیاً خیلی وقت‌ها به دلیل این‌که به دنبال جواب دادن به سؤال مشخصی هستیم و عموماً این سؤالات را با تشکیل پیشامد مطلوب پاسخ می‌گوییم. لذا ممکن است مدلسازی فضای نمونه‌ای ما متأثر از پیشامد تصادفی باشد. مثلاً آزمایش تصادفی مثال ۹ را می‌توان به صورت دیگری مدلسازی کرد.

مثال ۱۰: اگر در مثال ۹ تعداد «رو» آمدن‌ها موردنظر باشد می‌توان فضای نمونه‌ای را $S=\{۰,۱,۲,۳\}$ درنظر گرفت که ۰ نمایش دهندهٔ برآمدی است که در آن هیچ «رو» نیامده باشد و به همین ترتیب ۲ نمایش دهندهٔ برآمدی است که در آن ۲ رو آمده است و غیره.

به این ترتیب پیشامد A مثال ۹ مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۰\}$ و پیشامد B در مثال ۹ مجموعهٔ تک‌عضوی $\{۲\}$ است.

حال به چند مثال از پیشامدهای تصادفی پیوسته توجه می‌کنیم.

مثال ۱۱: فضای نمونه‌ای مربوط به طول عمر یک لامپ روشنایی را بیان کرده و پیشامد A برای از کار افتادن لامپ قبل از ۶۰ ساعت را مشخص کنید.

حل: اگر t طول عمر مفید لامپ بر حسب ساعت باشد، فضای نمونه‌ای را می‌توان به‌صورت $S=\{t|\quad t\geq ۰\}$ نوشت. $A=\{t|\quad ۰\leq t<۶۰\}$ پیشامدی است که سوختن لامپ قبل از ساعت شصتم استفاده را نشان می‌دهد.

مثال ۱۲: در مثال تیراندازی به هدف دایره‌ای شکل، شعاع بزرگترین دایرهٔ هدف را ۴ و شعاع سایر دایره‌ها را به ترتیب ۳، ۲ و ۱ سانتیمتر می‌گیریم.

A، B و C را به ترتیب پیشامدهایی درنظر می‌گیریم که عبارت باشند از اصابت تیر به دایره‌های دارای شعاع ۱، ۲ و ۳ سانتیمتر. فضای نمونه‌ای A، B و C را مشخص کنید.

حل:

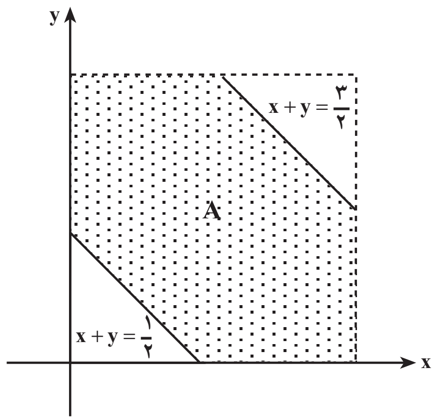
$$S=\{(x,y)|\quad x^۲+y^۲\leq ۱۶\}$$
$$A=\{(x,y)|\quad x^۲+y^۲\leq ۱\}$$
$$B=\{(x,y)|\quad x^۲+y^۲\leq ۴\}$$
$$C=\{(x,y)|\quad x^۲+y^۲\leq ۹\}$$

مثال ۱۳: فرض کنیم دو عدد حقیقی بین ۰ و ۱ به تصادف انتخاب شوند در این صورت فضای نمونه‌ای چنین خواهد بود :

$$S=\{(x,y)|\quad ۰<x<۱\ ,\ ۰<y<۱\}$$

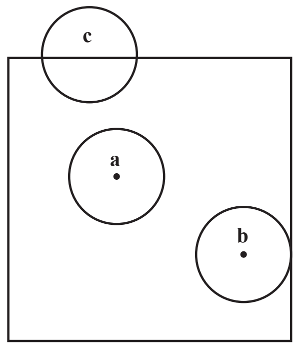
S درواقع مشخص‌کننده مربعی به ضلع یک است. اگر پیشامد موردنظر انتخاب دو عدد حقیقی با مجموع کوچکتر از ۱/۵ و بزرگتر از ۰/۵ باشد، می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد :

$$A=\{(x,y)|\quad \frac{۱}{۲}<x+y<\frac{۳}{۲}\ ,\ ۰<x<۱\ ,۰<y<۱\}$$



مثال ۱۴: سکه‌ای به شعاع ۱۰ را بر روی یک صفحهٔ مربعی به طول ضلع ۲۵ پرتاب می‌کنیم. فرض می‌کنیم که مرکز سکه پس از فرود آمدن حتماً داخل مربع یا روی محیط مربع قرار گیرد. فرض می‌کنیم که اگر براثر پرتاب، سطح سکه کاملاً در داخل مربع واقع شود؛ برنده و اگر با محیط مربع تماس داشته باشد، یا در خارج مربع بیفتد، بازنده محسوب شویم. در چنین شرایطی مطلوب است تعیین فضای نمونه‌ای مناسب و پیشامد مطلوب یعنی برنده شدن.

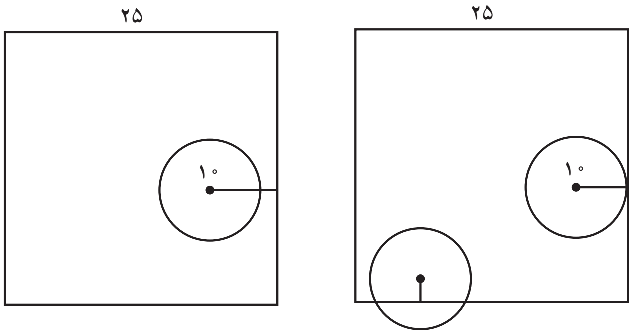
حل: طبق فرض سکهٔ a در شکل زیر برنده و سکه‌های b و c بازنده خواهند بود.



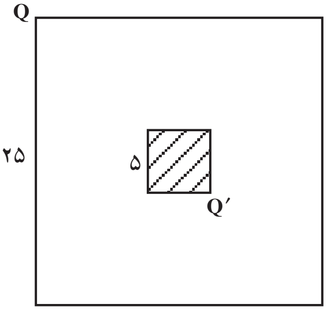
کلید حل این مسأله آن است که فرودآمدن سکه را چگونه مدلسازی کنیم. سکه دایره‌ای است به شعاع ۱۰ و مرکز متغیر. (بستگی به این دارد که کجا فرود آید.) بنابراین، چون شعاع سکه ثابت است می‌توان مکان سکه را تنها با مرکز آن مشخص نمود. مجموعهٔ برآمدهای ممکن، مجموعهٔ همهٔ آن نقاطی است که مرکز سکه در آن فرود می‌آید، طبق فرض حتماً سکه در داخل مربع یا روی مرز آن فرود می‌آید. بنابراین فضای نمونه‌ای ما داخل و مرز مربعی به طول ۲۵ است.

اگر مرکز سکه به فاصلهٔ بیشتر از ۱۰ از اضلاع مربع قرار گیرد، سکه کاملاً در داخل مربع واقع خواهد شد. و در صورتی که فاصلهٔ مرکز سکه از اضلاع مربع کمتر یا مساوی ۱۰ باشد، سکه

بر محیط مربع مماس است و یا اضلاع مربع را قطع می‌کند، یعنی بازنده خواهیم بود. به شکل‌های زیر توجه کنید.



بنابراین برای برد باید مرکز سکه به فاصلهٔ بیشتر از ۱۰ از اضلاع مربع قرار داشته باشد؛ یعنی در داخل مربع هاشور خورده در شکل زیر به ضلع ۲۵–۱۰–۱۰=۵ بیفتد.



۳ــ۴ــ عملیات بر روی پیشامدها

انجام عملیات بر روی پیشامدها و دست یافتن به پیشامدهای جدید با استفاده از اجتماع، اشتراک، و متمم‌گیری از دو یا یک پیشامد انجام می‌شود.

الف ــ پیشامد A B : اجتماع پیشامدهای A و B تنها وقتی به دست می‌آید که یکی از دو پیشامد A یا B و یا هر دو اتفاق بیفتد.

ب ــ پیشامد A B : اشتراک پیشامدهای A و B تنها وقتی حاصل می‌شود که پیشامدهای A و B هر دو واقع شوند.

ج ــ پیشامد ′A : متمم پیشامد A، تنها وقتی اتفاق می‌افتد که پیشامد A اتفاق نیفتد.

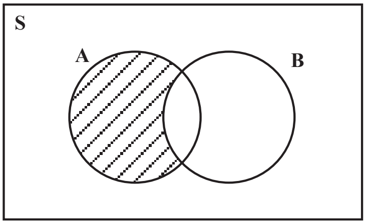
لازم است دقت کنیم در مورد یک فضای نمونه‌ای S، چون S و . هر دو نیز زیرمجموعه S هستند، این دو را هم می‌توانیم پیشامد تلقی کنیم و S را پیشامد **حتمی** و . را پیشامد **نشدنی** می‌نامیم و بدیهی است که پیشامدهای حتمی و نشدنی متمم یکدیگرند.

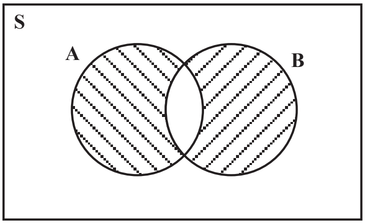
حال به چند مثال در مورد عملیات روی پیشامدها توجه کنید.

مثال ۱۵: اگر A و B دو پیشامد معین باشند، پیشامدهای زیر را به صورت عبارت‌های مجموعه‌ای بیان کنید و با استفاده از نمودار وِن آن‌ها را نشان دهید.

الف) A اتفاق بیفتد ولی B اتفاق نیفتد.

ب) تنها یکی از دو پیشامد A یا B اتفاق بیفتد.





حل: الف ــ چون A اتفاق می‌افتد امّا B اتفاق نمی‌افتد پس برآمدهای ما متعلق به مجموعهٔ A هستند و متعلق به مجموعهٔ B نیستند یعنی داخل A و خارج B می‌باشند و درنتیجه پیشامد مطلوب عبارت است از $A - B$.

ب ــ چون A یا B اتفاق می‌افتد ولی هر دو با هم اتفاق نمی‌افتند بنابراین برآمدهای ممکن متعلق به A   B می‌باشد و متعلق به هر دو یعنی A   B نیست پس متعلق به (A   B) − (A   B) می‌باشد. با توجه به قسمت (الف) این پیشامد مساوی اجتماع دو پیشامد B′   A و A′   B است درنتیجه :

(A   B) − (A   B) = (A   B′)   (B   A′)

که همان پیشامد مطلوب است و این مجموعه را تفاضل متقارن A و B می‌نامند.

تمرین



۱ــ فرض کنید A، B و C سه پیشامد باشند. برای هرکدام از پیشامدهای زیر یک عبارت مجموعه‌ای پیدا کرده و آن‌را با استفاده از نمودار وِن نشان دهید :

الفــ پیشامد A و پیشامد B اتفاق بیفتند اما پیشامد C اتفاق نیفتد.

بــ فقط پیشامد A اتفاق بیفتد.

۲ــ شرکتی درنظر دارد یک آزمایشگاه تحقیقاتی را در خوزستان و در یکی از شهرهای اهواز، آبادان، دزفول، خرمشهر، یا شوشتر تأسیس کند. اگر A پیشامد انتخاب خرمشهر یا شوشتر، B پیشامد انتخاب خرمشهر یا آبادان و C پیشامد انتخاب اهواز یا شوشتر باشند، هر یک از مجموعه‌های

زیر را مشخص کنید.

الف ــ A' ب ــ C' پ ــ $B \quad C$ ت ــ $B \quad C$

ث ــ $A \quad B$ ج ــ $(B \quad C)'$ چ ــ $B' \quad C'$

۳ــ هر یک از ارقام ۱ تا ۹ را روی یک کارت نوشته و پس از مخلوط کردن کارت‌ها یکی را به‌طور قرعه برمی‌داریم. مطلوب است تعیین :

الف ــ فضای نمونه‌ای.

ب ــ پیشامد A که در آن عدد روی کارت کوچکتر از ۶ باشد.

پ ــ پیشامد B که در آن عدد روی کارت، عددی اول باشد.

ث ــ پیشامد C که در آن عدد روی کارت بزرگتر از ۶ باشد.

۴ــ یک سکه را دو بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش و پیشامد آن که سکه اقلاً یک بار پشت بیاید را بنویسید.

۵ــ یک سکه را سه بار می‌اندازیم فضای نمونه‌ای این تجربه و پیشامد آن که اقلاً یک بار رو بیاید را بنویسید.

۶ــ یک تاس و یک سکه را با هم به هوا می‌اندازیم فضای نمونه‌ای این تجربه و پیشامد آن که سکه رو یا تاس ۶ بیاید را بنویسید.

۷ــ یک کیسه محتوی ۱۵ مهرهٔ قرمز و ۱۰ مهرهٔ سفید است. یک مهره را به طور تصادفی از داخل کیسه بیرون می آوریم، این مهره مسلماً سفید (س) یا قرمز (ق) خواهد بود. آیا مجموعهٔ { س , ق } می‌تواند نمایش فضای نمونه‌ای این تجربه باشد؟ توضیح دهید.

۸ ــ سکه‌ای را یک بار پرتاب می‌کنیم، اگر رو بیاید آنگاه تاس را می‌ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دو بار دیگر پرتاب می‌کنیم. مثلاً (۲ , ر) نشان‌دهندهٔ آمدن رو در پرتاب سکه و ۲ در انداختن تاس است و (پ ,پ , پ) سه بار متوالی پشت را نشان می‌دهد،

الف ــ ده عضو از فضای نمونه‌ای S را بنویسید.

ب ــ اگر A پیشامدی باشد که در آن دقیقاً یک بار سکه به پشت بیاید، عناصر این پیشامد را بنویسید.

پ ــ اگر B پیشامدی باشد که حداقل دو بار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد، عناصری از S را که با این پیشامد متناظر هستند بنویسید.

۹ــ با به کارگیری عبارت‌های مجموعه‌ای، فضای نمونه‌ای مرکب از تمام نقاط واقع بر محیط و داخل دایره‌ای به شعاع ۳ به مرکز (۳− و ۲) را مشخص کنید.

فصل ۴

احتمال: اندازه گیری شانس

با توجّه به آشنایی که با مفاهیم پدیده‌های تصادفی، فضاهای نمونه‌ای و پیشامدهای تصادفی پیدا کردیم، اکنون می‌توانیم احتمال وقوع یک پیشامد تصادفی را مورد مطالعه قرار دهیم. به‌عبارت دیگر، می‌خواهیم شانس وقوع یک پیشامد تصادفی را اندازه‌گیری کنیم. برای این منظور احتمال وقوع پیشامدهایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که در تمام فضای نمونه‌ای به‌طور یکسان در نظر گرفته می‌شوند مانند پرتاب سکه که در آن احتمال آمدن پشت یا رو یکسان است.

۴ــ۱ــ احتمال هم‌شانس در فضاهای گسسته

فضای گسسته را فضایی گرفتیم که تعداد عناصر آن متناهی باشند، و بنابراین هر زیرمجموعهٔ آن دارای تعداد معینی عضو است که قابل شمارش می‌باشد و چون هر زیرمجموعه یک فضای نمونه‌ای، یک پیشامد می‌باشد، بنابراین، با تعیین تعداد اعضای متناظر با هر پیشامد خاص و تقسیم آن بر تعداد کل عناصر فضای نمونه‌ای، می‌توان شانس وقوع آن پیشامد یا احتمال وقوع آن را اندازه گرفت. به‌زبان ریاضی برای به‌دست آوردن $P(A)$، احتمال وقوع پیشامد A، رابطهٔ زیر را به‌کار می‌بریم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

که $n(A)$ تعداد عضوهای A و $n(S)$ تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای S است. احتمال در فضاهای گسستهٔ هم‌شانس، احتمال **کلاسیک** نیز نامیده می‌شود.

مثال ۱: در ریختن یک تاس سالم[1]، احتمال آمدن عدد ۴ چقدر است؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد بحث عبارت است از :

$$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$$

۱ــ تاس سالم تاسی است که متقارن بوده و شانس آمدن هر وجه آن یکسان باشد.

احتمال ظاهر شدن عدد ۴ یا به‌عبارت دیگر احتمال وقوع پیشامد $A = \{۴\}$ عبارت است از :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱}{۶}$$

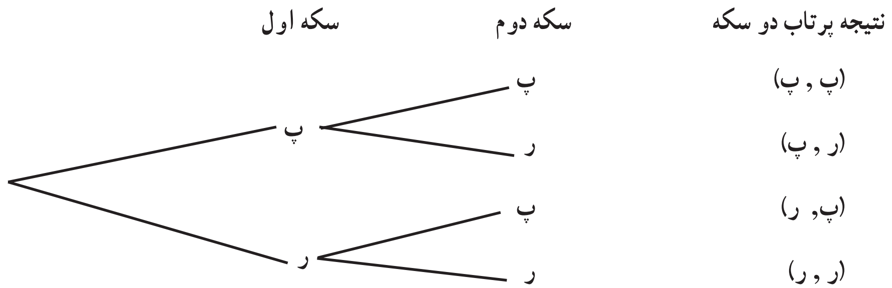
مثال ۲: دو سکه سالم را با هم پرتاب می‌کنیم. احتمال وقوع پدیده‌های زیر را محاسبه کنید.

الف ــ هر دو سکه به‌پشت بیفتد.

ب ــ یکی از دو سکه به‌پشت، و دیگری به‌رو بیفتد.

پ ــ حداقل یکی از سکه‌ها به‌پشت بیفتد.

حل: فضای نمونه‌ای آزمایش مورد بحث بااستفاده از نموداردرختی به‌قرار زیر است :



به‌عبارت دیگر فضای‌نمونه‌ای‌عبارت است از{ (ر, ر), (پ , ر), (ر ,پ),(پ ,پ) } = S پیشامد وقوع دو سکه به پشت زیرمجموعه { (پ , پ) } = $A_۱$ از S است، پس :

$$P(A_۱) = \frac{n(A_۱)}{n(S)} = \frac{۱}{۴}$$

پیشامد این‌که یکی از دو سکه به پشت و دیگری به رو بیفتد زیرمجموعهٔ { (ر, پ) ,(پ,ر) } = $A_۲$ از S می‌باشد، در نتیجه :

$$P(A_۲) = \frac{n(A_۲)}{n(S)} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

و بالاخره پیشامد این‌که حداقل یک سکه به‌پشت بیفتد زیرمجموعهٔ $A_۳$ از S است که { (ر, پ), (پ , ر), (پ , پ) } = $A_۳$ ، زیرا کافی است یکی از سکه‌ها به‌پشت بیفتد یا هر دو سکه به‌پشت بیفتند، پس :

$$P(A_۳) = \frac{n(A_۳)}{n(S)} = \frac{۳}{۴}$$

مثال ۳: در ریختن یک جفت تاس قرمز و سبز، احتمال این‌که مجموع ارقام ظاهر شده برابر ۷

باشد را محاسبه کنید.

حل: در این آزمایش، فضای نمونه‌ای عبارت است از

$$S=\{(a,b)\mid a,b\in K\}=K\times K$$

که $K=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$، پس S دارای ۳۶ عضو می‌باشد. پیشامد مورد نظر عبارت است از :

$$A=\{ (۱,۶)،(۲,۵)،(۳,۴)،(۴,۳)،(۵,۲)،(۶,۱) \}$$

پس :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

مثال ۴: تمام ترکیبات دو رقمی مجموعهٔ اعداد $\{۱,۲,۳\}$ را روی کارت‌های مختلف نوشته (هرترکیب روی یک کارت) و پس از مخلوط کردن کارت‌ها، یک کارت را به‌طور تصادفی برمی‌داریم احتمال آن که روی این کارت عدد ۲ باشد چیست؟

حل: فضای نمونه آزمایش مورد نظر عبارت است از :

$$S=\{۱۲,۱۳,۲۱,۲۳,۳۱,۳۲\}$$

و پیشامد مطلوب زیرمجموعهٔ A از فضای نمونه است :

$$A=\{۱۲,۲۱,۲۳,۳۲\}$$

در نتیجه احتمال آن برابر است با :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

مثال ۵: از مجموعهٔ $\{۱,۲,۳,\ \ldots,۱۰۰۰\}$، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل هزار عضو است. پس $n(S)=۱۰۰۰$.
فرض می‌کنیم A مجموعهٔ همهٔ اعدادی باشد که بین ۱ تا ۱۰۰۰ هستند و بر ۳ نیز بخش‌پذیرند، پس :

$$A=\{۳m:\quad ۱\le m\le ۳۳۳\}$$

و $n(A)=۳۳۳$. در نتیجه احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد برابر $\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$ است.

مثال ۶: از مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{۱,۲,۳,\ \ldots,N\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم، احتمال این‌که عدد انتخابی بر عدد k، $(۱\le k\le N)$ بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

حل: فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی شامل N عضو است. فرض کنید A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر عدد k باشد، در این‌صورت :

$$A = \left\{ km: \quad ۱ \le m \le \left[\frac{N}{k}\right] \right\}$$

که در آن، $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی با x است. پس

$$n(A) = \left[\frac{N}{k}\right]$$

$$P(A) = \frac{\left[\frac{N}{k}\right]}{N}$$

مثال ۷: از یک سبد محتوی ۴ سیب سالم و ۵ سیب فاسد، ۲ سیب به‌طور تصادفی بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آن‌که هر دو سیب سالم باشند.

حل: در بسیاری از موارد اصولاً نوشتن پیشامدهای مطلوب و فضای نمونه‌ای به‌صورت فهرست‌وار، کاری وقت‌گیر و دشوار است و باید از راه دیگری تعداد عناصر مورد نیاز را شمارش کنیم. در این مثال فضای نمونه عبارت است از همهٔ ترکیبات دوتایی از سیب‌ها که می‌توان آن‌ها را از یک سبد محتوی ۹ سیب خارج کرد. با استفاده از **آنالیز ترکیبی** از ریاضی (۲) می‌دانیم که تعداد این ترکیبات چنین به‌دست می‌آید :

$$n(S) = \binom{۹}{۲} = \frac{۹!}{۲!\ ۷!} = ۳۶$$

پیشامد مطلوب A، آن است که هر دو سیبی که خارج کرده‌ایم سالم باشند، ۴ سیب سالم داریم، با توجه به‌این‌که سیب‌های خروجی باید حتماً یک جفت از این ۴ سیب باشند، داریم :

$$n(A) = \binom{۴}{۲} = \frac{۴!}{۲!\ ۲!} = ۶$$

پس :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۶}{۳۶} = \frac{۱}{۶}$$

مثال ۸: از بین ۲۲ دانش‌آموز قرار است به‌طور تصادفی ۸ نفر برای تشکیل تیم کوهنوردی دبیرستان انتخاب شوند. اگر ۱۰ نفر از این دانش‌آموزان در سال اول و ۱۲ نفر دیگر در سال دوم مشغول به‌تحصیل باشند، مطلوب است احتمال آن‌که ۴ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند.

حل: در اینجا فضای نمونه‌ای عبارت است از تمام حالات ممکن برای انتخاب ۸ نفر از ۲۲

نفر، یعنی $\binom{۲۲}{۸}$. پیشامد مطلوب حالت‌هایی است که ۴ نفر از دانش‌آموزان سال اول (که تعداد آن‌ها ۱۰ نفر است) و ۴ نفر از دانش‌آموزان سال دوم (که تعداد آن‌ها ۱۲ نفر است) انتخاب شوند. تعداد حالت‌های انتخاب ۴ نفر از ۱۰ نفر عبارت است از $\binom{۱۰}{۴}$ و تعداد انتخاب‌های ممکن ۴ نفر از ۱۲ نفر مساوی است با $\binom{۱۲}{۴}$. طبق اصل اساسی شمارش (یا اصل ضرب که در ریاضی (۲) خوانده‌اید)، تعداد تمام حالت‌های این پیشامد مساوی با حاصلضرب این دو عدد $\binom{۱۲}{۴}$ و $\binom{۱۰}{۴}$ می‌باشد. پس :

$$n(A) = \binom{۱۰}{۴}\binom{۱۲}{۴}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\binom{۱۰}{۴} \times \binom{۱۲}{۴}}{\binom{۲۲}{۸}} = \frac{۲۱۰}{۳۲۳}$$

مثال ۹ : n نفر را در نظر می‌گیریم احتمال این‌که روز تولد هیچ دو نفری از آن‌ها یک روز نباشد را مشخص کنید (برای سادگی کار، از احتمال وقوع تولد افراد در روز آخر سال‌های کبیسه صرف‌نظر می‌کنیم).

حل: چون تعداد افراد مورد بررسی n است و هریک از آن‌ها ممکن است در ۳۶۵ روز مختلف سال به‌دنیا آمده باشد، بنابراین در این مسأله با یک فضای نمونه‌ای ۳۶۵^n عضوی روبه‌رو هستیم، (با استدلالی مشابه وقتی که دو تاس را با هم می‌اندازیم و فضای نمونه‌ای ما $۶^۲$ عضو دارد) پس داریم $n(S) = ۳۶۵^n$ ، از میان n نفر مورد نظر، نفر اول احتمال دارد که در یکی از ۳۶۵ روز سال به‌دنیا آمده باشد. چون فرض بر یکسان نبودن روز تولد افراد است پس نفر دوم ممکن است در یکی از ۳۶۴ روز باقیمانده سال متولد شده باشد و به‌همین ترتیب نفر سوم در یکی از ۳۶۳ روز باقیمانده و بالاخره نفر nام در یکی از $۳۶۵ - n + ۱$ روز ممکن است متولد شده باشد. بدین ترتیب، با توجه به‌اصل اساسی شمارش، nنفر ممکن است $۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \ldots \times (۳۶۵ - n + ۱)$ روز تولد متفاوت داشته باشند. بنابراین اگر A پیشامد مورد نظر باشد داریم :

$$n(A) = ۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \ldots \times (۳۶۵ - n + ۱)$$

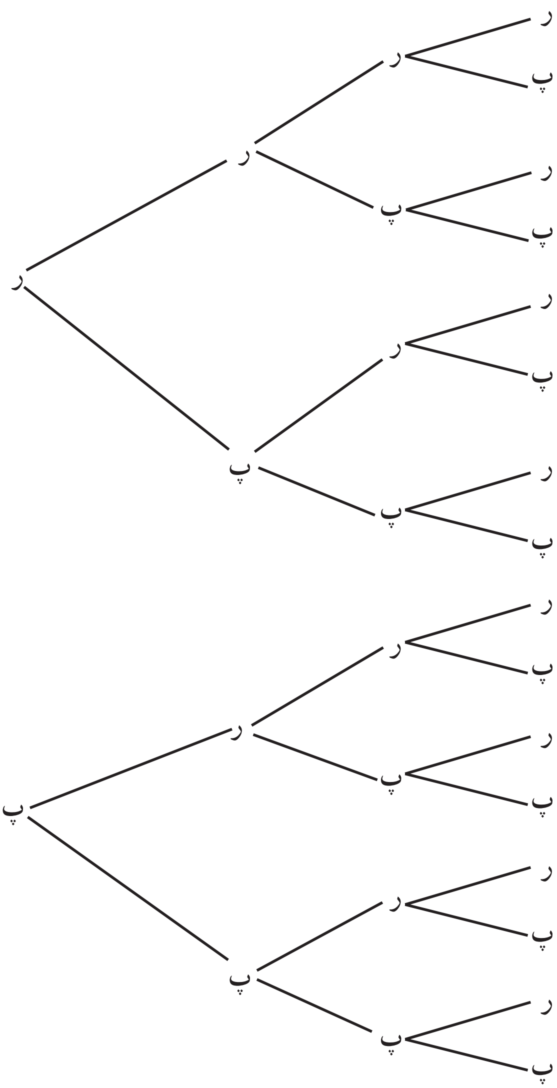
پس :

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۳۶۵ \times ۳۶۴ \times \ldots \times (۳۶۵ - n + ۱)}{۳۶۵^n}$$

دقت کنید که اگر $n > ۳۶۵$ آنگاه طبق اصل لانهٔ کبوتری حتماً دو نفر در یک روز متولد شده‌اند، که در این حالت $P(A) = ۰$.

۴ـ۲ـ احتمال دو جمله‌ای

اگر یک سکهٔ سالم یک بار پرتاب شود هرکدام از برآمدها دارای احتمال $\frac{۱}{۲}$ است. اگر سکه را دو،سه یا چهار بار پرتاب کنیم، به ترتیب چهار، هشت یا شانزده حالت هم شانس وجود دارد که در نمودار درختی زیر نشان داده شده است :



(ر، ر، ر، ر)

(پ، ر، ر، ر)

(ر، پ، ر، ر)

(پ، پ، ر، ر)

(ر، ر، پ، ر)

(پ، ر، پ، ر)

(ر، پ، پ، ر)

(پ، پ، پ، ر)

(ر، ر، ر، پ)

(پ، ر، ر، پ)

(ر، پ، ر ، پ)

(پ، پ، ر، پ)

(ر، ر، پ، پ)

(پ، ر، پ، پ)

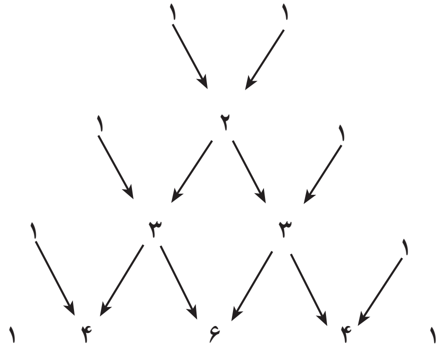
(ر، پ، پ، پ)

(پ، پ، پ، پ)

بدین ترتیب جدول زیر را برای پرتاب ۱، ۲، ۳ و ۴ سکه به‌دست می‌آوریم.

احتمال	تعداد رو آمدن‌ها	پرتاب ... سکه
$\frac{۱}{۲}$	۰	یک سکه
$\frac{۱}{۲}$	۱	
$\frac{۱}{۴}$	۰	دو سکه
$\frac{۲}{۴}$	۱	
$\frac{۱}{۴}$	۲	
$\frac{۱}{۸}$	۰	سه سکه
$\frac{۳}{۸}$	۱	
$\frac{۳}{۸}$	۲	
$\frac{۱}{۸}$	۳	
$\frac{۱}{۱۶}$	۰	چهار سکه
$\frac{۴}{۱۶}$	۱	
$\frac{۶}{۱۶}$	۲	
$\frac{۴}{۱۶}$	۳	
$\frac{۱}{۱۶}$	۴	

حال صورت کسرهای احتمال در جدول فوق را به‌صورت نمودار زیر درمی‌آوریم :



این اعداد یک مثلث تشکیل می‌دهند که به‌مثلث خیام ــ پاسکال موسوم است. هر عدد در یک سطر مثلث از جمع کردن جفت اعداد چپ و راست آن در سطر بالایی به‌دست می‌آید. این مثلث را تا بی‌نهایت می‌توان ادامه داد. اگر به‌ضرایب حاصل از بسط توان‌های طبیعی دوجمله‌ای $a+b$ نگاه کنیم، همین اعداد موجود در مثلث فوق را می‌یابیم :

$$(a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^3$$

و در حالت کلی از آنالیز ترکیبی در ریاضی (۲) می‌دانیم که :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

بنابراین :

$$P\,(\text{آمدن } k \text{رو}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

مثال ۱۰ : تاس سالمی را ۱۵ بار می‌ریزیم. احتمال این‌که ۶ بار برآمد تاس یک عدد فرد باشد، چیست؟ احتمال این‌که ۱۰ بار برآمد تاس یک عدد زوج باشد، چقدر است؟

حل: چون در ریختن یک تاس سالم، برآمد مشاهده شده یا زوج است و یا فرد، بنابراین می‌توان گفت $S=\{\text{فرد و زوج}\}$ و $P(\text{زوج آمدن تاس}) = P(\text{فرد آمدن تاس}) = \frac{1}{2}$ و مانند مثال پرتاب سکهٔ سالم، خواهیم داشت

$$P(\text{۶بار مشاهدهٔ عدد فرد}) = \frac{\binom{15}{6}}{2^{15}} = 0/15$$

$$P(\text{۱۰ بار مشاهدهٔ عدد زوج}) = \frac{\binom{15}{10}}{2^{15}} = 0/09$$



تمرین

۱ــ در یک خانواده با دو فرزند احتمال این‌که بچه‌ها از دو جنس مخالف ویا هردو دختر باشند را پیدا کنید.

۲ــ رمز یک قفل، عددی سه رقمی است که تنها با تنظیم سه رقم آن به‌طور صحیح می‌توان قفل را باز کرد. با علم به‌تکراری نبودن ارقام رمز، احتمال کشف کردن تصادفی رمز قفل فقط با یک بار تنظیم ارقام را پیدا کنید.

۳ــ مسألهٔ فوق را با فرض وجود یک رمز پنج رقمی حل کنید.

۴ــ اگر یک عدد ۴ رقمی کمتر از ۵۰۰۰ به طور تصادفی با ترکیب ارقام ۹،۷،۵،۳،۱ به‌وجود آید، احتمال این‌که عدد ساخته شده بر ۵ بخش‌پذیر باشد را پیدا کنید.

۵ ــ یک کلمه چهار حرفی به‌طور تصادفی با استفاده از حروف کلمهٔ «**خوارزمی**» ساخته شده است. احتمال این‌که این کلمه دارای حرف نقطه‌دار نباشد را پیدا کنید. مسأله را با فرض تکراری بودن حروف و نیز بدون این فرض حل کنید.

۶ ــ یک جفت تاس مخصوص داریم که در هرکدام از آن‌ها به‌جای ارقام ۱ تا ۶ دو عدد ۱، دو عدد ۲ و دو عدد ۳ نمایش داده شده است. این دو تاس را با هم می‌اندازیم. احتمال وقوع مجموع‌های زیر را پیدا کنید :

الف) ۵ ب) عددی فرد

۷ــ ۵ نفر زن و ۶ نفر مرد برای شغلی تقاضا کرده‌اند. با این حال، امکان استخدام تنها برای ۵ نفر از آن‌ها وجود دارد احتمال انتخاب ۵ نفر را در حالت‌های زیر پیدا کنید :

الف) ۳ زن و ۲ مرد انتخاب شوند.

ب) ۵ زن انتخاب شوند.

پ) حداقل ۴ مرد انتخاب شوند.

۸ ــ یک تاس و یک سکه با هم انداخته می‌شوند، مطلوب است :

الف) احتمال آن که تاس عدد زوج و سکه رو بیاید.

ب) احتمال آن که تاس عدد زوج یا سکه رو بیاید.

۹ ــ یک کیسه محتوی ۲۰ مهره قرمز، ۱۰ مهره سفید و ۱۵ مهره سبز است. یک مهره را به‌طور تصادفی از کیسه بیرون می‌آوریم. مطلوب است :

الف) احتمال آن که این مهره سفید باشد.

این مهره را به‌کیسه برگردانده ۲ مهره را به طور تصادفی بیرون می‌آوریم.

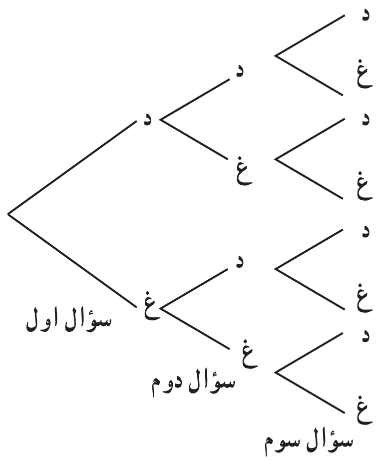
ب) احتمال آن که یک مهره قرمز ویک مهره سفید باشد.

۱۰ــ نمودار درختی زیر راه‌های پاسخ دادن به‌سه سؤال در یک آزمون دو گزینه‌ای (درست ــ غلط) را نشان می‌دهد. حرف «د» یعنی درست و حرف «غ» یعنی غلط. اگر سؤالها به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال :

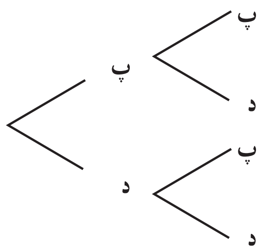
الف) این‌که هر سه سؤال صحیح جواب داده شده باشند ؛

ب) هیچ یک از سؤالات صحیح جواب داده نشده باشند ؛

پ) تعداد سؤالات صحیح پاسخ داده شده بیشتر باشند.



۱۱ــ نمودار درختی زیر حالات ممکن تولد پسر و دختر را در یک خانوادهٔ دو فرزندی نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم احتمال پسر بودن فرزند $\frac{1}{2}$ باشد.



الف) با توجه به‌نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

تعداد پسرها	۰	۱	۲
تعداد حالات	۱	۲	۱
احتمال	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$
درصد احتمال	۰/۲۵	۰/۵۰	۰/۲۵

ب) احتمال این‌که دو فرزند هم جنس باشند چیست؟

پ) احتمال این‌که دست کم یک فرزند پسر باشد چیست؟

۱۲ـ نمودار درختی زیر احتمال‌های باریدن برف را طی چهار روز متوالی در یک محوطهٔ اسکی نشان می‌دهد. («ن» یعنی نباریدن برف و «ب» یعنی باریدن برف) فرض می‌کنیم احتمال آمدن برف در یک روز مفروض $\frac{۱}{۲}$ باشد.

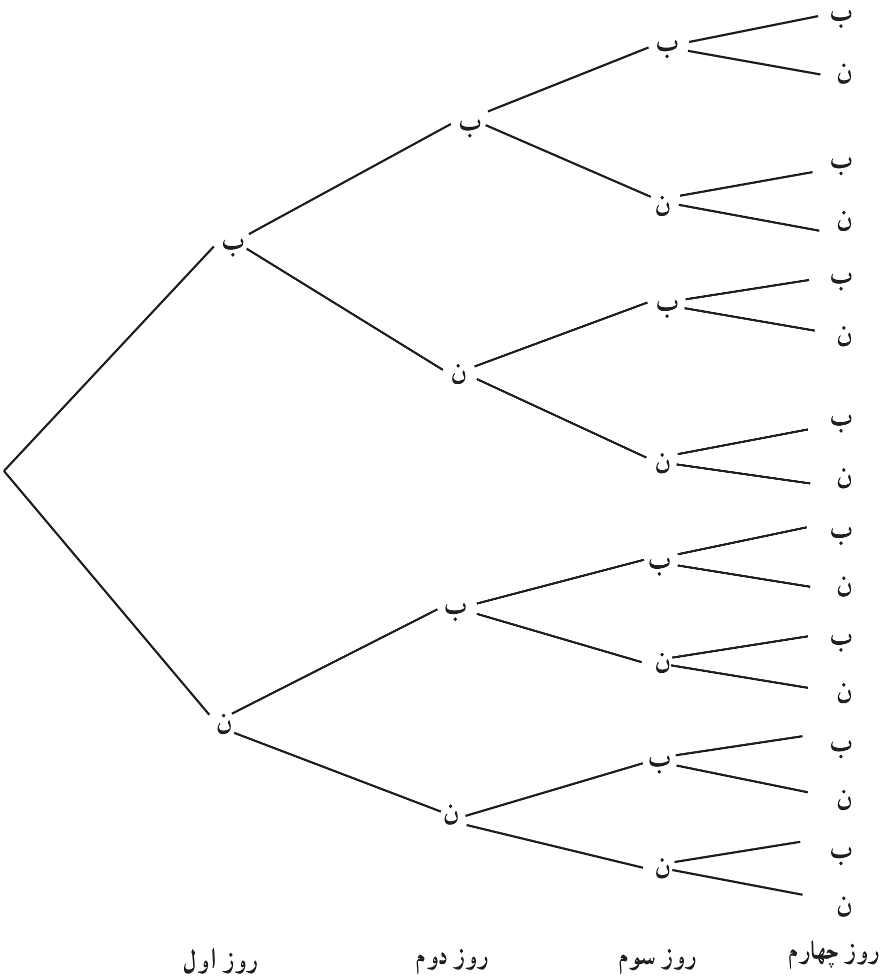
الف) با توجه به‌نمودار درختی جدول زیر را کامل کنید :

تعداد روزهای باریدن برف	۴	۳	۲	۱	۰
تعداد امکان‌های مختلف	۱	۴	۶	۴	۱
احتمال	$\frac{۱}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۶}{۱۶}$	$\frac{۴}{۱۶}$	$\frac{۱}{۱۶}$
درصد احتمال	٪۶/۲۵	۲۵-		۲۵-	

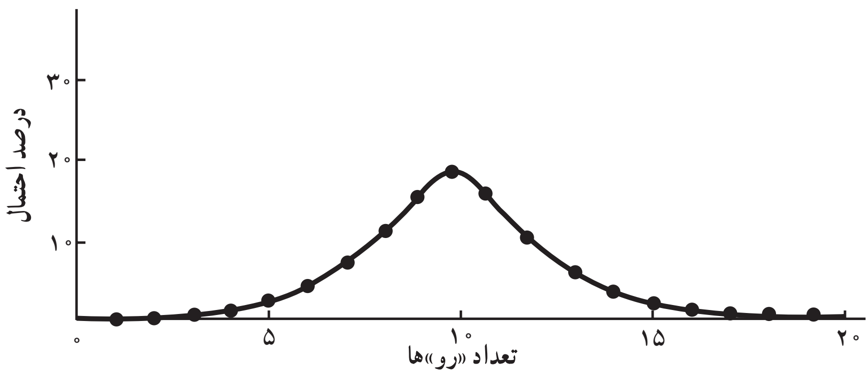
ب) درصد احتمال این‌که طی چهار روز متوالی دست کم دو روز برف ببارد چیست؟ $\frac{۸}{۱۶}=۵۰$ -

پ) کدام محتملتر است؟ دقیقاً یک روز برف ببارد یا دقیقاً سه روز.

$\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{۱۶}$ دقیقاً سه روز $\frac{۱}{۴}=\frac{۴}{۱۶}$ دقیقاً یک روز



۱۳ــ نمودار زیر احتمال‌های رخ دادن پیشامد «رو» در پرتاب ۲۰ سکه را نشان می‌دهد.



به‌نمودار صفحهٔ قبل رجوع کنید و به‌این سؤالات پاسخ دهید :

الف) اگر هر بیست سکه پرتاب شوند آمدن چند «رو» محتملتر است؟

ب) با توجه به فرض الف احتمال آن‌که آن تعداد «رو» بیاید چقدر است؟ (به‌کمک نمودار تقریب بزنید)

پ) کدامیک عجیبتر است؟ این‌که در پرتاب ۱۰ سکه تعداد «رو»ها و «پشت»ها مساوی باشد یا در پرتاب ۲۰ سکه؟

ت) اگر تعداد سکه‌هایی که پرتاب می شود را افزایش دهیم،احتمال مساوی بودن تعداد «ر» و «پ»ها چه تغییری می کند؟

۴ــ۳ــ احتمال غیر هم‌شانس در فضاهای گسسته

در بخش قبل فرض کرده بودیم احتمال وقوع پیشامدهای مورد بررسی در تمام نقاط فضای نمونه‌ای یکسان باشد. مثلاً در پرتاب سکه، احتمال آمدن «پشت» یا «رو» هر دو $\frac{۱}{۲}$ بود. اما این فرض همیشه یک فرض واقع‌بینانه نیست و برای سادگی مطلب در بندهای قبل گذاشته شده بود. یکی از راه‌های محاسبه احتمال، استفاده کردن از محاسبهٔ فراوانی است.

مثال ۱ : در مورد مثال بالا اگر یک سکه را ۱۰۰ بار پرتاب کنیم و در این ۱۰۰ بار، ۴۵ بار «رو» بیاید، طبیعی است که کسر $\frac{۴۵}{۱۰۰}$ و یا ۴۵ - و یا ۰/۴۵ را احتمال آمدن «رو» در نظر بگیریم. واضح است با این استدلال احتمال آمدن پشت ۵۵ - می‌باشد. بنابراین در فضای $S=\{ر , پ\}$ ، داریم

$$P\{ر\}! = ۰/۴۵ \quad و \quad P\{پ\}! = ۰/۵۵$$

مجموعه‌های تک عضوی {پ} و {ر} را مجموعه‌های ساده می گوییم. و احتمال هر مجموعهٔ تک عنصری $\{x\}$ را با $P(x)$ یا $P(\{x\})$ نشان می‌دهیم.

*هر زیرمجموعهٔ تک‌عضوی‌ از فضای‌نمونه‌ای‌را یک **پیشامدساده** گوییم.*

می‌بینیم که :

$$P(ر) + P(پ) = ۰/۴۵ + ۰/۵۵ = ۱$$

یعنی احتمال پیشامدهای ساده بزرگتر یا مساوی صفر و کوچکتر یا مساوی یک می‌باشد و مجموع احتمال‌های پیشامدهای ساده ۱ می‌باشد.

مثال ۲ : در مسألهٔ پرتاب سه سکه بخش قبل، اگر فضای نمونه‌ای را $\{۰,۱,۲,۳\}$ بگیریم که در آن هرعضو این فضا تعداد «رو» آمدن‌های سه سکه باشد، آن گاه با استفاده از احتمال دوجمله‌ای می‌دانیم که :

$$P(۰)=P\{\text{هیچ رو نیاید}\}=\frac{۱}{۸}$$

$$P(۱)=P\{\text{یک بار رو آمده باشد}\}=\frac{۳}{۸}$$

$$P(۲)=P\{\text{دو بار رو آمده باشد}\}=\frac{۳}{۸}$$

$$P(۳)=P\{\text{سه بار رو آمده باشد}\}=\frac{۱}{۸}$$

ملاحظه می‌کنیم که :

$$P(۰)+P(۱)+P(۲)+P(۳)=\frac{۱}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۳}{۸}+\frac{۱}{۸}=۱$$

در حالت کلی فرض کنیم فضای نمونه‌ای ما $S=\{e_۱,e_۲,...,e_n\}$ شامل n عضو باشد. به‌هر پیشامد ساده $\{e_k\}$ یک عدد حقیقی $P\{e_k\}$ که احتمال پیشامد $\{e_k\}$ است را نسبت می‌دهیم. این عدد باید تحت شرایط زیر انتخاب گردد :

۱) احتمال یک پیشامد ساده عددی بین ۰ و ۱ است ؛ یعنی

$$۰\le P(e_k)\le ۱$$

۲) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای برابر ۱ است ؛ یعنی :

$$P(e_۱)+P(e_۲)+...+P(e_n)=۱$$

اعداد $P(e_۱)$ ، $P(e_۲)$ ، ... ، $P(e_n)$ را که در شرط بالا صدق می‌کنند «تخصیص احتمال مقبول» می‌نامیم.

فرض کنیم یک تخصیص احتمال مقبول به‌پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای S داده شده باشد. چگونه می‌توان یک احتمال برای پیشامد دلخواه A در S تعریف نمود؟

۴ــ۴ــ احتمال یک پیشامد اختیاری

اگر یک تخصیص احتمال مقبول به‌پیشامدهای ساده در فضای نمونه‌ای S داده شده باشد، به‌پیشامد A احتمالی را که با P(A) نشان می‌دهیم به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم :

الف) اگر A پیشامد غیرممکن (یعنی مجموعهٔ ∅ .) باشد آنگاه

$$P(A)=0$$

ب) اگر A یک پیشامد ساده باشد P(A) خودبه‌خود تعریف شده است.

ج) اگر A پیشامد مرکب باشد، یعنی A اجتماعی از پیشامدهای ساده باشد، آنگاه P(A) مجموع احتمالات تمام پیشامدهای ساده در A می‌باشد.

د) اگر A خود فضای نمونه‌ای S باشد، آنگاه :

$$P(A)=P(S)=1$$

در واقع این قسمت حالت خاصی از (ج) است.

حال اگر حالت هم‌شانس بخش قبل رادر نظر بگیریم، یعنی :

$$P(e_1)=P(e_2)=\ ...\ =P(e_n)$$

آنگاه چون $1=P(e_1)+P(e_2)+\ ...\ +P(e_n)$ داریم :

$$P(e_1)=P(e_2)=\ ...\ =P(e_n)=\frac{1}{n}$$

حال اگر مجموعهٔ A دارای m عضو $\{f_1,f_2,...,f_m\}$ باشد طبق تعریف فوق داریم :

$$P\{f_1,f_2,...,f_m\}!=P\{f_1\}+\ ...\ +P\{f_m\}=\underbrace{\frac{1}{n}+...+\frac{1}{n}}_{\text{m بار}}=\frac{m}{n}$$

یعنی :

$$P(A)=\frac{\text{تعداد اعضای A}}{\text{تعداد اعضای S}}$$

که همان فرمول بخش قبل است. یعنی ملاحظه می‌کنیم که مطالب این بخش در واقع تعمیم بخش قبل است.

مثال ۳: فرض کنیم فضای نمونه‌ای ما $S=\{1,2,3,4\}$ باشد. در هر دو حالت زیر به‌پیشامدهای سادهٔ S اعدادی را نسبت داده‌ایم. بررسی کنید که آیا این نسبت‌ها که آن‌ها را تخصیص

دادن احتمال می‌نامیم مجاز هستند و یا نه، دلیل پاسخ خود را بیان کنید.

الف) $P(۱)=۰/۱۲\ ,\ P(۲)=۰/۶۳\ ,\ P(۳)=۰/۴۵\ ,\ P(۴)=-۰/۲۰$

ب) $P(۱)=\frac{۹}{۱۲۰}\ ,\ P(۲)=\frac{۴۵}{۱۲۰}\ ,\ P(۳)=\frac{۲۷}{۱۲۰}\ ,\ P(۴)=\frac{۴۶}{۱۲۰}$

حل: در مورد (الف) چون $P(۴)=-۰/۲۰$ ناقض فرض (۱) در مورد پیشامدهای ساده است، یعنی احتمال باید نامنفی باشد، بنابراین تخصیص احتمال مجاز نیست. اما در مورد (ب) داریم

$$P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)=\frac{۹}{۱۲۰}+\frac{۴۵}{۱۲۰}+\frac{۲۷}{۱۲۰}+\frac{۴۶}{۱۲۰}=\frac{۱۲۷}{۱۲۰}>۱$$

و این خاصیت (۲) در مورد پیشامدهای ساده را نقض می‌کند بنابراین، این تخصیص احتمال هم مجاز نیست.

مثال ۴: تاسی به‌گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد فرد دو برابر احتمال وقوع هر عدد زوج است. اگر در یک پرتاب این تاس، A پیشامد وقوع عددی بزرگ‌تر از ۳ باشد، $P(A)$ را بیابید.

حل: فضای نمونه‌ای عبارت است از $S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$. حال اگر به‌هر عدد زوج احتمال w نسبت دهیم، آنگاه احتمال عدد فرد برابر ۲w است ؛ یعنی :

$$P(۱)=P(۳)=P(۵)=۲w \ \text{و}\ P(۲)=P(۴)=P(۶)=W$$

و چون مجموع این پیشامدهای ساده باید ۱ باشد، بنابراین :

$$۲w+w+۲w+w+۲w+w=۹w=۱$$

و از آنجا $w=\frac{۱}{۹}$ ، حال قرار می‌دهیم $A=\{۴,۵,۶\}$ طبق خاصیت (ج) داریم :

$$P(A)=P(۴)+P(۵)+P(۶)=\frac{۱}{۹}+\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۹}=\frac{۴}{۹}$$

مثال ۵: سه اسب a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. فرض کنیم احتمال برد a دو برابر احتمال برد b و احتمال برد b دو برابر احتمال c است.

الف) مطلوب است احتمال برد هر کدام از اسب‌ها.

ب) مطلوب است احتمال این‌که a یا b ببرند.

حل: گیریم $P(c)=p$ ، چون شانس برد b دو برابر شانس برد c است. پس : $P(b)=۲p$ و چون شانس برد a دو برابر شانس برد b است پس: $P(a)=۲(۲p)=۴p$. حال چون مجموع

احتمال‌های فوق باید برابر ۱ باشد پس :

$$p+۲p+۴p=۱$$

یا $۷p=۱$. در نتیجه $p=\frac{۱}{۷}$ و از آنجا داریم :

$$P(a)=۴p=\frac{۴}{۷}$$

$$P(b)=۲p=\frac{۲}{۷}$$

$$P(c)=p=\frac{۱}{۷}$$

پیشامد این‌که یا a ببرد یا b، مجموعهٔ $\{a,b\}$ است. طبق تعریف :

$$P(\{a,b\})=P(a)+P(b)=\frac{۴}{۷}+\frac{۲}{۷}=\frac{۶}{۷}$$

مثال ۶: گیریم $S=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ ، مطلوب است محاسبهٔ

الف) $P(a_۱)$ ، اگر $P(a_۲)=\frac{۱}{۳}$ ، $P(a_۳)=\frac{۱}{۶}$ ، $P(a_۴)=\frac{۱}{۹}$

ب) $P(a_۱)$ و $P(a_۲)$ اگر $P(a_۳)=P(a_۴)=\frac{۱}{۴}$ و $P(a_۱)=۲P(a_۲)$

ج) $P(a_۱)$ اگر $P(\{a_۲,a_۳\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{a_۲,a_۴\})=\frac{۱}{۲}$ و $P(a_۲)=\frac{۱}{۳}$

حل: الف) فرض کنیم $p=P(a_۱)$. آنگاه چون P تخصیص احتمال مقبول به‌فضای S است بنابراین :

$$P(a_۱)+P(a_۲)+P(a_۳)+P(a_۴)=۱$$

و از آنجا :

$$p+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}+\frac{۱}{۹}=۱ \Rightarrow p=\frac{۷}{۱۸}$$

ب) گیریم $p=P(a_۲)$. آنگاه $P(a_۱)=۲p$. و از آنجا :

$$۲p+p+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴}=۱$$

و یا $p=\frac{۱}{۶}$. بنابراین $P(a_۲)=\frac{۱}{۶}$ و $P(a_۱)=\frac{۱}{۳}$.

ج) گیریم $P(a_۱)=p$. آنگاه چون

$$P(a_۳)=P(\{a_۲,a_۳\})-P(a_۲)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

و

$$P(a_4)=P\ \{a_2,a_4\}!-P(a_2)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

در نتیجه :

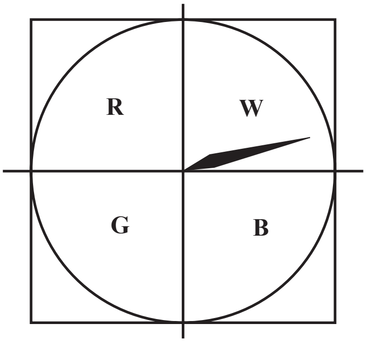
$$p+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

و یا $p=\frac{1}{6}$. یعنی $P(a_1)=\frac{1}{6}$.



تمرین

۱ــ دردستگاه زیر دایره را به‌چهار رنگ سبز (G)، قرمز (R)، آبی (B)، سفید (W) رنگ‌آمیزی کرده‌ایم. عقربه رابه‌چرخش درمی‌آوریم. اگر احتمال‌های ایستادن عقربه روی رنگ‌های مختلف، متفاوت باشند، کدامیک از تخصیص احتمال‌های زیر غیرمجازند؟



الف) $P(R)=0.32$ و $P(G)=0.28$ و $P(W)=0.24$ و $P(B)=0.30$

ب) $P(R)=0.26$ و $P(G)=0.14$ و $P(W)=0.30$ و $P(B)=0.30$

۲ــ یک سکهٔ ناسالم را پرتاب می‌کنیم. فرض کنیم شانس آمدن «رو» دو برابر شانس آمدن «پشت» باشد. مطلوب است محاسبهٔ P(ر) و P(پ).

۳ ــ سه شناگر a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. a و b دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس بردن هرکدام از آن‌ها دو برابر c است. مطلوب است احتمال این‌که b یا c ببرد.

۴ــ ۵ ــ احتمال در فضاهای پیوسته

در این بخش به محاسبهٔ احتمال در فضاهای پیوسته می‌پردازیم. فضاهای پیوسته، برخلاف فضاهای گسسته که از تعدادی متناهی نقطه تشکیل شده‌اند، مجموعه‌هایی نامتناهی می‌باشند نظیر بازه‌ها در محور اعداد حقیقی یا سطوح در صفحه و غیره. واضح است که در این حالت دیگر شمارش تعداد عناصر فضای نمونه‌ای یا پیشامد میسر نیست ولی آنچه که می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد «اندازه» طول بازه‌ها، مساحت سطوح، و حجم شکل‌های فضایی است. در این حالت نسبت «اندازهٔ» فضای پیشامد به «اندازهٔ» فضای نمونه‌ای، **احتمال** وقوع پیشامد را مشخص می‌کند. به عبارت دیگر اگر پیشامد مطلوب را با A نمایش دهیم، داریم :[1]

اگر $S \subset \mathbb{R}$ و A داریم : $$P(A)=\frac{\text{طول } A}{\text{طول } S}=\frac{l_A}{l_S}$$

اگر $S \subset \mathbb{R}^۲$ و A داریم : $$P(A)=\frac{\text{مساحت } A}{\text{مساحت } S}=\frac{a_A}{a_S}$$

اگر $S \subset \mathbb{R}^۳$ و A داریم : $$P(A)=\frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } S}=\frac{v_A}{v_S}$$

حال به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

مثال ۱: در مثال تیراندازی به هدف دایره‌ای شکل فرض می‌کنیم شعاع صفحهٔ هدف ۲۰ سانتیمتر و شعاع دایرهٔ کوچکتر ۱۰ سانتیمتر است. فرض می‌کنیم تیر حتماً به صفحهٔ هدف برخورد می‌کند، احتمال برخورد تیر به دایرهٔ کوچکتر را محاسبه کنید.

حل: فضای نمونه، مساحت دایرهٔ بزرگتر و پیشامد A مساحت دایرهٔ کوچکتر است، بنابراین :

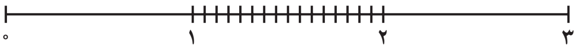
$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\pi\times ۱۰^۲}{\pi\times ۲۰^۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۲: از بین اعداد حقیقی بین ۰ و ۳ یک عدد به تصادف انتخاب می‌شود، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن‌که این عدد بین ۱ و ۲ انتخاب شده باشد.

۱ــ در این قسمت فرض بر این است که احتمال روی طول، سطح و حجم یکسان توزیع شده است.

حل: فضای نمونهٔ بازهٔ $S=[0,3]$ و پیشامد مطلوب بازهٔ $A=[1,2]$ است، پس :

$$P(A)=\frac{l_A}{l_S}=\frac{1}{3}$$



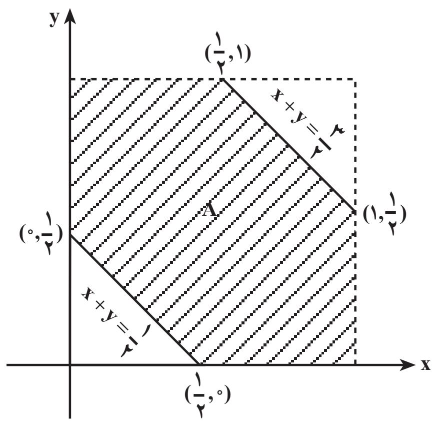
مثال ۳: فرض می‌کنیم دو عدد حقیقی بین ۰ و ۱ به تصادف انتخاب شوند، مطلوب است احتمال آن که مجموع این دو عدد بین ۰/۵ و ۱/۵ باشد.

حل: فضای نمونه‌ای مناسب عبارت است از :

$$S=\{(x,y)\mid 0<x<1,\ 0<y<1\}$$

و پیشامد مطلوب مجموعهٔ زیر است :

$$A=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}<x+y<\frac{3}{2}\right\}$$



بنابراین :

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{\frac{3}{4}}{1}=\frac{3}{4}$$

مثال ۴: فرض می‌کنیم دو قطعه چوب داریم که طول‌های آن‌ها به ترتیب ۱ و ۰/۵ متر می‌باشد. قطعه بزرگ‌تر را با ارّه دو قسمت می‌کنیم که در نتیجه سه قطعه چوب حاصل می‌شود، احتمال این‌که سه قطعه چوب تشکیل یک مثلث را بدهند، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم قطعه چوب یک متری، در نقطه E بریده شود که به فاصله x از یک سر چوب قرار دارد.



بنابراین فضای نمونه‌ای را می‌توان خط AB به طول ۱ متر در نظر گرفت، در این‌جا پیشامد مطلوب آن است که پاره‌خط‌های AE و EB و پاره‌خط دیگر که آن را CD می‌نامیم (همان چوب به طول ۰/۵ متر) مثلثی تشکیل دهند. ولی اگر سه پاره خط بخواهند تشکیل مثلث بدهند باید طول هر پاره‌خط از مجموع طول‌های دو پاره‌خط دیگر کمتر باشد یعنی :

$$AE + EB > CD$$

$$AE + CD > EB$$

$$EB + CD > AE$$

چون $CD = \frac{1}{2}$ و $AE = x$ و $EB = 1 - x$ ، پس داریم :

$$x + (1 - x) > \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{1}{2} > 1 - x$$

$$(1 - x) + \frac{1}{2} > x$$

با ساده کردن سه نامساوی بالا :

(به طور بدیهی درست است) $1 > \frac{1}{2}$

$$x > \frac{1}{4}$$

$$x < \frac{3}{4}$$

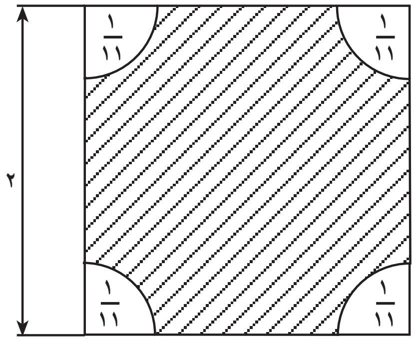
در نتیجه پیشامد مطلوب به صورت زیر قابل بیان خواهد بود :

$$A = \left\{ x \mid \frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \right\}$$

$$P(A) = \frac{l_A}{l_S} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

مثال ۵: یک چترباز از داخل هواپیما بر روی زمین مربع شکلی به طول ضلع ۲ کیلومتر می‌پرد. در چهارگوشهٔ زمین، مناطقی پوشیده از درخت وجود دارند که می‌توان آن‌ها را به‌صورت ربع دایره‌هایی به شعاع $\frac{1}{11}$ کیلومتر و به مرکز رأس‌های مربع تصور کرد. (به شکل صفحهٔ بعد نگاه کنید.) اگر چترباز در یکی از مناطق مزبور فرود بیاید چتر او به درختان گیر خواهد کرد. اگر فرض کنیم

که چترباز حتماً در نقطه‌ای از قطعه زمین مورد بحث فرود آید و با فرض این‌که مختصات مکان فرود نیز تصادفی باشد، مطلوب است محاسبهٔ احتمال این‌که فرود او بدون گیر کردن به درخت‌ها انجام بگیرد.



حل: فضای نمونه‌ای مربعی به ضلع ۲ کیلومتر می‌شود و پیشامد موردنظر مجموعهٔ هاشور زده شده است. بنابراین احتمال برابر است با :

$$\frac{۴-\frac{\cdot}{۱۲۱}}{۴} \; (\; ۰/۹۹$$

( ) علامت تقریب است.)

یادداشت: در این مسأله احتمال این‌که چترباز در یک نقطه فرود آید صفر است حتی احتمال این‌که چترباز روی یک خط فرود آید صفر است، زیرا سطح این نوع مجموعه‌ها صفر می‌باشد.

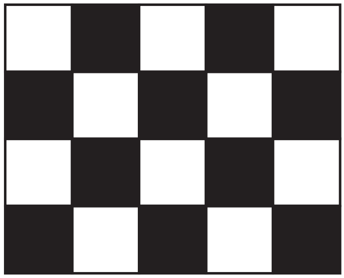
*پیشامدهایی که احتمال وقوع آن‌ها صفر است را پیشامدهای **تقریباً غیرممکن** می‌نامیم.*

مثال ۶: در مثال (۱۴) فصل قبل احتمال برنده شدن چقدر است؟

حل: در مثال (۱۴) فصل قبل فضای نمونه‌ای و پیشامد مطلوب را مشخص کردیم. فضای نمونه‌ای مربعی به طول ۲۵ و پیشامد مطلوب مربع کوچکی در داخل آن به طول ۵ بود. اگر A پیشامد موردنظر باشد، احتمال برابر است با :

$$P(A)=\frac{a_A}{a_S}=\frac{(۵)^۲}{(۲۵)^۲}=\frac{۱}{۲۵}$$

یادداشت: اگر سکه را به جای مربع مطرح شده در مسأله بر روی صفحه‌ای شطرنجی شکل متشکل از مربع‌های بسیار نیز پرتاب کنیم، باز احتمال آن‌که سکه بر روی مرز مشترک بین هیچ دو مربعی نیفتد، برابر با مقداری خواهد بود که به دست آوردیم.



توجیه این مطلب با توجه به شکل فوق بدیهی به نظر می‌رسد.

مرکز سکهٔ پرتاب شده ممکن است در داخل هر کدام از مربع‌های هم اندازه با مربع Q واقع شود و در آن صورت همان‌طور که در مسأله مشاهده کردید، پیشامد ما مربع Q' خواهد بود (شکل صفحه ۸۱). بنابراین در داخل هر یک از مربع‌های بزرگتر مجموعه‌ای به اندازهٔ مربع هاشور خوردهٔ داخل آن وجود دارد که اگر سکه داخل آن بیفتد، بازی را خواهیم برد. در نتیجه اگر پیشامد آن‌که سکه بر روی محیط هیچ کدام از مربع‌ها نیفتد را A بنامیم، داریم:

$$P(A) = \frac{\text{مساحت مربع‌های هاشور خورده}}{\text{مساحت کل صفحه}} = \frac{۱}{۲۵}$$

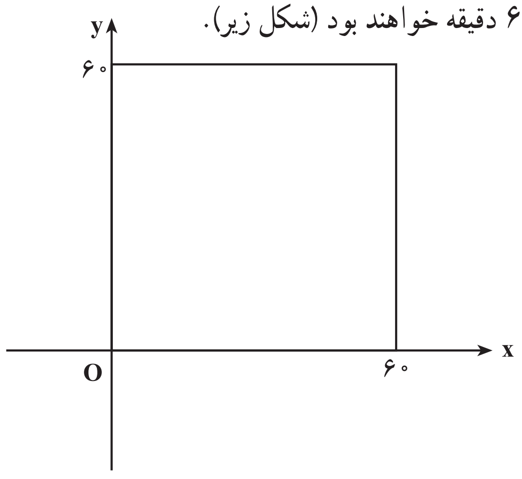
مثال ۷: اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یک‌بار به ایستگاه می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۷ تا ۷:۳۰ به یک ایستگاه وارد شود، احتمال این‌که کمتر از ۵ دقیقه معطّل بماند چقدر است؟ احتمال این‌که بیشتر از ۱۰ دقیقه معطل بماند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

حل: چون شخص در لحظه‌ای بین ۷ تا ۷:۳۰ به ایستگاه می‌رسد، فضای نمونه‌ای مربوط به آزمایش تصادفی رسیدن به ایستگاه اتوبوس فاصلهٔ (۷ و ۷:۳۰) است. برای این‌که شخص کمتر از ۵ دقیقه منتظر اتوبوس شود باید در یکی از لحظات بین ۷:۱۰ تا ۷:۱۵ یا ۷:۲۵ تا ۷:۳۰ به ایستگاه برسد. بنابراین پیشامد مورد نظر از دو فاصلهٔ زمانی (۷:۱۰ و ۷:۱۵) و (۷:۲۵ و ۷:۳۰) تشکیل

یافته است. لذا احتمال این پیشامد برابر است با $\frac{۵+۵}{۳۰}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$. برای این‌که شخص بیشتر از ۱۰ دقیقه منتظر اتوبوس بماند، باید در یکی از لحظات بین ۷ تا ۵ :۷ یا ۱۵ :۷ تا ۲۰ :۷ به ایستگاه برسد، لذا در این حالت پیشامد مطلوب عبارت است از اجتماع دو فاصلهٔ (۵ :۷ و ۷) و (۲۰ :۷ و ۱۵ :۷)، در نتیجه، احتمال آن برابر است با $\frac{۵+۵}{۳۰}=\frac{۱۰}{۳۰}=\frac{۱}{۳}$. ملاحظه می‌کنید که احتمال‌های هر دو پیشامد مساوی هستند. این مطلب عجیب نیست؟

مثال ۸ : مسئله‌ی روبه‌رو شدن دو دوست: حسن و احمد قرار گذاشتند که هنگام بازدید از نمایشگاه کتاب یکدیگر را بین ساعت ۴ تا ۵ بعد از ظهر در بخش کتاب‌های مرجع ببینند. قرار آن‌ها به‌این‌صورت بود که هر کدام زودتر سر قرار حاضر شد ۱۵ دقیقه منتظر دیگری بماند و بعد از آن، به‌بازدید از نمایشگاه ادامه دهد. با فرض این‌که زمان سر قرار رسیدن هریک به‌طور تصادفی بین ۴ تا ۵ بعدازظهر است، احتمال این‌که این دو یک دیگر را ملاقات کنند، چقدر است؟

حل: فرض کنیم حسن x دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر و احمد y دقیقه بعد از ساعت ۴ بعد از ظهر سر قرار حاضر شوند. می‌توانیم زمان‌های رسیدن هریک را به‌صورت زوج‌های مرتب (x,y) درنظر بگیریم به‌طوری که $۰<x<۶۰$ و $۰<y<۶۰$. عضوهای فضای نمونه‌ای، نقاط داخل مربعی به ضلع ۶۰ دقیقه خواهند بود (شکل زیر).



برای این‌که حسن و احمد بتوانند یک دیگر را ملاقات کنند، باید موقع سر قرار رسیدنشان در فاصلهٔ زمانی ۱۵ دقیقه از یک‌دیگر رُخ دهد. زیرا قرار گذاشته بودند که فقط ۱۵ دقیقه برای یک‌دیگر صبر کنند. این شرط را می‌توان با نامساوی قدرمطلق

$$|x-y|<۱۵$$

بیان کرد. برای مثال، اگر احمد ۱۴ دقیقه بعد از حسن برسد هم‌دیگر را ملاقات می‌کنند. یعنی

$$y - x = ۱۴$$

یا

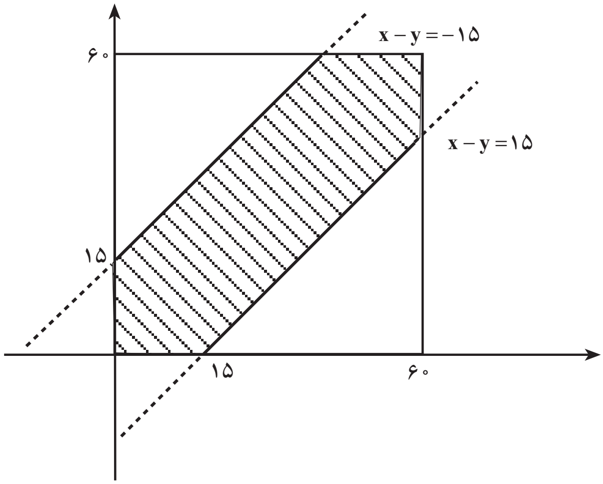
$$x - y = -۱۴$$

در نتیجه

$$|x - y| = ۱۴$$

بنابراین، نامساوی برقرار است.

نمودار $|x-y|<۱۵$ که در داخل فضای نمونه‌ای محصور است، ناحیهٔ موفقیت را نشان می‌دهد.



اگر ناحیهٔ موفقیت (ناحیهٔ هاشور خورده) را با r و فضای نمونه‌ای را با R نشان دهیم، آنگاه احتمال مطلوب یعنی $P(r)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$P(r) = \frac{\text{مساحت ناحیهٔ } r}{\text{مساحت مربع}}$$

$$= \frac{\left(\begin{matrix}\text{مساحت مربع}\\ \text{به ضلع ۶۰}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{دو مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین}\\ \text{به ضلع قائمه ۴۵}\end{matrix}\right)}{۶۰^۲}$$

$$= \frac{۶۰^۲ - \left[\frac{۱}{۲}(۴۵)^۲ + \frac{۱}{۲}(۴۵)^۲\right]}{۶۰^۲}$$

) ۰/۴۴



تمرین

۱ــ نقطه‌ای مانند x را به طور تصادفی در بازهٔ $[0,3]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که داشته باشیم $1<x<2/5$ را تعیین کنید.

۲ــ بر روی مربع Q با مشخصات $Q=\{(x,y) \mid 0\le x\le 1 \ , \ 0\le y\le 1\}$ یک نقطه را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که داشته باشیم $x\le y\le 1-x$ را تعیین کنید.

۳ــ دو نقطه را به طور تصادفی در بازهٔ $[0,1]$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که $|x-y|<\frac{1}{2}$ را پیدا کنید.

۴ــ در بازهٔ $[0,1]$ دو نقطه به طور تصادفی طوری انتخاب می‌شوند که بازه را به سه پاره‌خط تقسیم کنند. احتمال این را پیدا کنید که سه پاره‌خط تشکیل یک مثلث بدهند.

۵ــ یک نقطه (x,y) را به طور تصادفی بر روی مثلثی به رأسهای $(0,0)$، $(4,0)$ و $(2,3)$ انتخاب می‌کنیم. احتمال پیشامدهای زیر چیست ؟

الف) $x<2$ ب) $x<2y$

پ) (x,y) درون یک مستطیل به رأس‌های $(0,1)$، $(2,1)$، $(2,2)$ و $(0,2)$، قرار داشته باشد.

۶ــ یک نقطه به طور تصادفی درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع ۳ انتخاب می‌شود، مطلوب است احتمال آن که فاصله آن نقطه از هر رأس بیشتر از ۱ باشد.

۷ــ روی محور اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$، نقاط a و b به طور تصادفی انتخاب شده‌اند به‌طوری که: $-2\le b\le 0$ و $0\le a\le 3$، مطلوب است محاسبهٔ احتمال آن که فاصلهٔ بین a و b بزرگتر از ۳ باشد.

۸ــ دو عدد حقیقی به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می‌شوند. مطلوب است احتمال آن که :

الف) مجموع دو عدد کمتر از ۲ باشد.

ب) مجموع دو عدد بیشتر از ۱ باشد.

پ) مجموع دو عدد بین ۱ و ۲ باشد.

۹ــ دو عدد به طور تصادفی بین ۰ و ۲ انتخاب می شوند.

الف) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد مساوی ۱ باشد.

ب) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد کمتر از ۱ باشد.

پ) مطلوب است احتمال آن که نسبت دو عدد بین ۰/۴ و ۰/۵ باشد.

۱۰ــ در مثال ۴ این بخش فرض می‌کنیم پاره‌خط بزرگتر AB برابر $2l$ و پاره‌خط کوچکتر CD مساوی l باشد. نقطه E را به طور تصادفی روی AB انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال آن که AE، EB و CD تشکیل یک مثلث بدهند.

۱۱ــ مسأله ۱۰ را در حالات زیر حل کنید.

الف) اگر $AB = 4l$ و $CD = l$.

ب) اگر $AB = nl$ و $CD = l$ ، که در آن n یک عدد طبیعی است.

۱۲ــدر عبارت $2p - q$ مقدار ضریب p را به طور تصادفی بین ۱و ۲ و مقدار ضریب q را به طور تصادفی بین ۱- و ۳ انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال این‌که حاصل عبارت بالا کمتر از $\frac{1}{2}$ باشد.

۱۳ــ در مثال (۵) مسألهٔ چترباز، به جای شعاع $\frac{1}{11}$، عدد $\frac{1}{9}$ قرار دهید و مسأله را حل کنید. در حالت کلی مسأله را برای مربعی به ضلع l و شعاع R حل کنید.

۱۴ــ اتوبوس‌های شرکت واحد از ساعت ۷ صبح شروع به کار می‌کنند و هر ۱۵ دقیقه یکبار به ایستگاه خاصی می‌رسند. اگر شخصی در لحظه‌ای بین ساعت ۸ تا ۸:۳۰ به این ایستگاه وارد شود، احتمال این‌که کمتر از ۵ دقیقه معطل بماند چقدر است؟ احتمال این‌که بیشتر از ۱۰ دقیقه صبر کند تا اتوبوس برسد چقدر است؟

۱۵ــ تجربه قبلی نشان می‌دهد که هر کتاب جدید از ناشر خاصی می‌تواند بین ۴ تا ۱۲درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد. مطلوب است محاسبه احتمال این‌که کتاب بعدی این ناشر حداکثر ۶/۳۵ درصد بازار کتاب را به خود اختصاص دهد.

۱۶ــ زمان تصادفی برحسب دقیقه که حیوان خاصی نسبت به داروی خاصی عکس‌العمل نشان دهد بین ۲ و ۴/۳ دقیقه می‌باشد مطلوب است احتمال این‌که عکس‌العمل این حیوان نسبت به آن دارو کمتر از ۳/۲۵ دقیقه طول بکشد.

۱۷ــ بار دیگر مسألهٔ ملاقات حسن و احمد را درنظر بگیرید. احتمال این‌که زمان رسیدن احمد به زمان رسیدن حسن نزدیکتر از ساعت ۴ بعد از ظهر باشد، چقدر است؟

۱۸ــ در معادلهٔ $ax+b=۰$ ، ضریب a به‌طور تصادفی عددی در بازهٔ [۱,۲] و ضریب b نیز به‌طور تصادفی عددی از بازهٔ [۱,۱−] انتخاب شده است. احتمال این‌که جواب معادله بزرگتر از ۰/۲۵ باشد چقدر است؟

۱۹ــ یک تاجر منتظر دو تماس تلفنی از علی و رضا است. احتمال این‌که علی در فاصلهٔ زمانی بین ۲ تا ۴ بعد از ظهر با او تماس بگیرد به اندازه احتمال تماس تلفنی رضا در فاصلهٔ زمانی بین ساعت ۲:۳۰ تا ۳:۳۰ بعد از ظهر است. احتمال در حالت‌های زیر را محاسبه نمایید :

الف) علی قبل از رضا تلفن بزند ؛

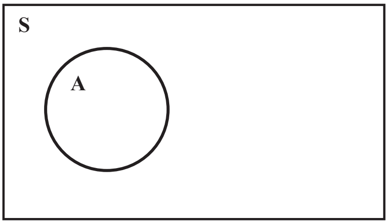
ب) فاصلهٔ دو تماس تلفنی کمتر از ۱۰ دقیقه باشد ؛

پ) علی اوّل تماس بگیرد، فاصلهٔ تلفن‌ها کمتر از ۱۰ دقیقه باشد و هر دو تلفن قبل از ساعت ۳ بعد از ظهر باشد.

۴ــ۶ــ قوانین احتمال

می‌دانیم که از تقسیم کردن اندازهٔ پیشامد ؛یعنی طول، سطح و حجم پیشامد بر اندازهٔ فضای نمونه‌ای در حالت پیوسته،احتمال به دست می آید. با توجه به این‌که فضای پیشامد A همواره زیرمجموعهٔ فضای نمونه‌ای S است،پس اگر P(A) احتمال وقوع پیشامد A باشد، همیشه داریم :

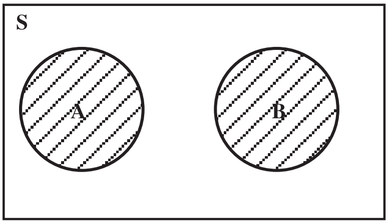
اصل ۱	$۰ \le P(A) \le ۱$



در این‌جا در واقع چون A زیرمجموعهٔ S است پس نسبت «اندازهٔ»A به «اندازهٔ» S، کوچکتر یا مساوی ۱ می‌باشد و واضح است که وقتی مساوی ۱ است که $A=S$ ، پس :

اصل۲	$P(S)=۱$

حال اگر A و B را پیشامدهایی در فضای نمونه‌ای S بگیریم که هر دو با هم اتفاق نمی‌افتند



یعنی در واقع $A \cap B = \varnothing$ ، که در این صورت دو پیشامد را **ناسازگار** می‌نامیم، می‌خواهیم احتمال وقوع هر دو پیشامد A و B یعنی $A \cup B$ را بررسی کنیم.

در واقع برای پیدا کردن $P(A \cup B)$ می‌توانیم مجموع «اندازه‌های» A و B را بر «اندازهٔ» S تقسیم کنیم که در نتیجه در این حالت احتمال $A \cup B$ برابر حاصل جمع احتمال A و احتمال B خواهد بود.

اصل ۳	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad , \quad A \cap B = \varnothing$

برای حالت گسسته با احتمال کلی نیز می‌توان سه اصل بالا را ثابت کرد. (این مطلب به عنوان تمرین آورده شده است.) سه اصل فوق در واقع اصول علم احتمالات هستند که نخستین بار ریاضیدان برجسته **آندره کولموگروف**[1] در سال ۱۹۳۳ آن‌ها را بیان کرد و علم احتمالات را مبتنی بر یک **دستگاه اصولی** مدون ساخت. حال می‌توان به کمک این سه اصل بقیهٔ قوانین احتمال را استنتاج نمود.

قضیه ۱: اگر A، B و C سه پیشامد دو بدو مجزا باشند، یعنی اشتراک هر جفت از آن‌ها تهی باشد، آن‌گاه

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C).$$

برهان: با استفاده از خاصیت شرکت‌پذیری مجموعه‌ها داریم:

$$P(A \cup B \cup C) = P((A \cup B) \cup C) \qquad (۱)$$

در رابطهٔ فوق $A \cup B$ و C مجموعه‌های از هم جدا هستند زیرا:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$$

بنابراین رابطهٔ (۱) را به این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P[(A \cup B) \cup C] \\ &= P(A \cup B) + P(C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) \end{aligned}$$

رابطهٔ اخیر به واسطهٔ $A \cap B = \varnothing$ برقرار است. ▨

۱ــ A.Kolmogorov

قضیه ۲: اگر داشته باشیم $A \ . \ B$، آنگاه

الف) $P(A) \leq P(B)$.

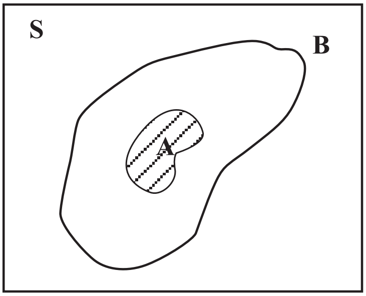
ب) $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

برهان: می‌دانیم که $B = (B-A) \quad A$.(به شکل زیر رجوع کنید.) همچنین A و $B-A$ از هم جدا هستند، زیرا $(B-A) \quad A = \ .$ بنابراین طبق اصل ۳ احتمال $P(B) = P(B-A) + P(A)$. حال

اثبات الف) چون $P(B-A) \geq 0$ بنابراین $P(A) \leq P(B)$ ؛

اثبات ب) $-P(A)$ را به دو طرف تساوی فوق اضافه می‌کنیم و به دست می‌آوریم

$$P(B-A) = P(B) - P(A)$$ ▨



توجه: در قضیهٔ ۲، شرط $A \ . \ B$ لازم است و بدون آن نتایج (الف) و (ب) در حالت کلی برقرار نیستند. مثلاً تاس سالمی را می‌ریزیم. پیشامدهای

«عدد تاس بیشتر از ۵ نباشد» = A

«عدد تاس زوج باشد» = B

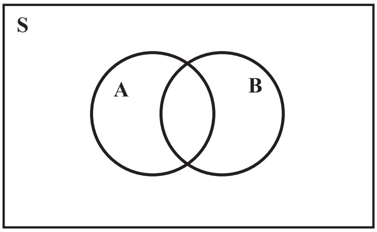
را درنظر می‌گیریم. در این صورت $A = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B = \{۲,۴,۶\}$ می‌باشد. روشن است که $A \underline{+} B$ ، $A - B = \{۱,۳,۵\}$ و داریم :

$$P(A) = \frac{۵}{۶} \ , \ P(B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲} \quad , \quad P(A-B) = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

بنابراین

$$P(A) - P(B) = \frac{۵}{۶} - \frac{۱}{۲} = \frac{۱}{۳} \neq \frac{۱}{۲} = P(A-B)$$

و (ب) برقرار نیست. همچنین نامساوی (الف) نیز در این حالت برقرار نیست. به‌طور کلی دلیلی ندارد که برای دو پیشامد داده شدهٔ A و B، همواره $P(A)$ کوچکتر یا مساوی $P(B)$ باشد.



حال اگر A و B دو پیشامدی باشند که $A \quad B \neq \ .$ یعنی مجزا از یکدیگر نباشند، احتمال وقوع $A \quad B$ یعنی $P(A \quad B)$ چه مقداری خواهد بود ؟با توجه به رابطهٔ زیر

$$A \quad B = (A - A \quad B) \quad (B - A \quad B) \quad (A \quad B)$$

که به کمک نمودار وِن قابل بررسی است.و از طرف دیگر چون $(A - A \quad B)$، $(B - A \quad B)$ و $(A \quad B)$ مجزا از یکدیگرند در نتیجه :

$$P(A \quad B) = P(A - A \quad B) + P(B - A \quad B) + P(A \quad B)$$

ولی چون $A \quad B \,\&\, A$ و $A \quad B \,\&\, B$، پس :

$$P(A - (A \quad B)) = P(A) - P(A \quad B)$$

$$P(B - (A \quad B)) = P(B) - P(A \quad B)$$

حال با جایگذاری دو رابطهٔ اخیر در رابطهٔ قبلی نتیجه می‌شود :

قضیه ۳:اگر A و B دو پیشامد در فضای نمونه‌ای S باشند،آنگاه

$$P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \quad B)$$

حال به دو مثال توجه می‌کنیم :

مثال ۱:اگر احتمال وجود تلویزیون رنگی در یک خانه ۴۱٪،سیاه و سفید ۸۵٪ و از هر دو نوع ۳۲٪ باشد، احتمال این‌که در این خانه لااقل یکی از دو نوع تلویزیون موجود باشد،چقدر است؟

حل:اگر A پیشامد وجود تلویزیون رنگی،B وجود تلویزیون سیاه و سفید و C وجود هر دو نوع تلویزیون باشد، طبق فرض داریم :

$$P(A) = ۰/۴۱ \ , \ P(B) = ۰/۸۵ \ , \ P(C) = ۰/۳۲$$

حال با استفاده از قضیهٔ (۳)می‌نویسیم :

$$P(A \quad B) = ۰/۸۵ + ۰/۴۱ - ۰/۳۲$$

$$= ۱/۲۶ - ۰/۳۲ = ۰/۹۴$$

مثال ۲: احتمال این‌که شخصی ناراحتی کلیه داشته باشد،۰/۲۳ ، ناراحتی قلبی داشته باشد ۰/۲۴ و دست کم یکی از این دو نوع بیماری را داشته باشد ۰/۳۸ است.احتمال این‌که هر دو نوع بیماری را دارا باشد چقدر است ؟

حل: اگر A پیشامد بیماری کلیوی داشتن و B پیشامد بیماری قلبی داشتن باشد، طبق فرض

داریم :

$$P(A)=۰/۲۳$$

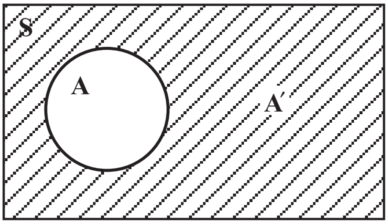
$$P(B)=۰/۲۴$$

$$P(A\quad B)=۰/۳۸$$

بنابراین :

$$P(A\quad B)=P(A)+P(B)-P(A\quad B)=۰/۰۹$$

فرض کنید A پیشامدی در فضای نمونه‌ای S باشد،یعنی A & S ،مکمل A نسبت به S را که با A' نشان می‌دهیم **پیشامد مکمل A** می‌نامیم. در واقع رخ دادن A' به معنای رخ ندادن پیشامد A است.



اجتماع A و A' برابر فضای نمونه‌ای S است ولی از طرف دیگر A و A' مجزا از یکدیگرند یعنی $A\quad A'=.$ ، پس داریم :

$$P(A)+P(A')=P(A\quad A')=P(S)=۱$$

در نتیجه :

$$\boxed{P(A')=۱-P(A)}$$

مثال ۳: قبلاً احتمال این‌که n نفر در یک میهمانی روز تولد متفاوتی داشته باشند را محاسبه کرده‌ایم :

$$P(A)=\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times...\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^n}$$

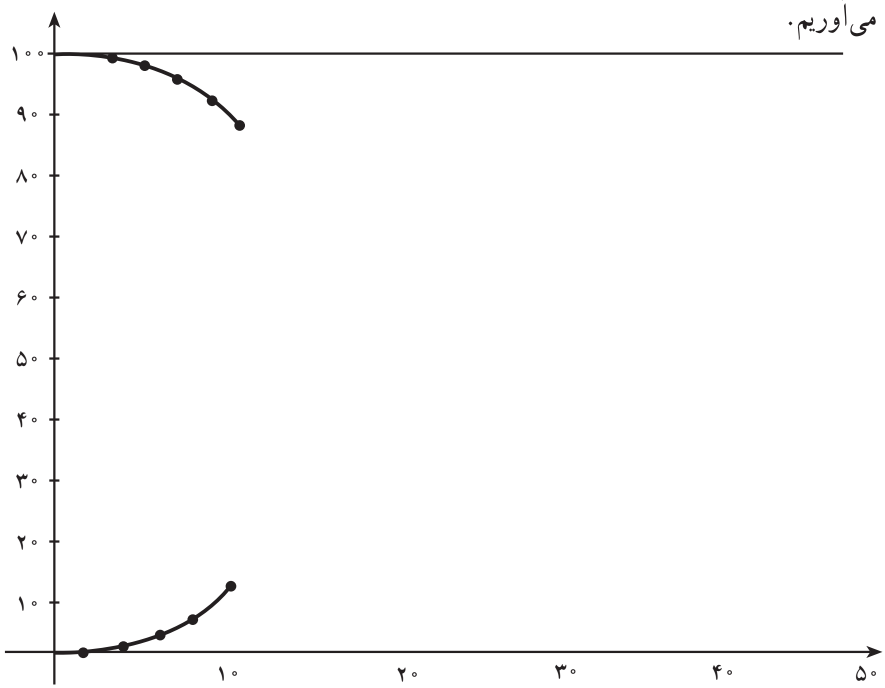
که A همان پیشامد روزهای تولد متفاوت برای n نفر بود. حال اگر بخواهیم احتمال این‌که حداقل دو نفر روز تولد یکسانی داشته باشند را پیدا کنیم چون پیشامد یکسان بودن روز تولد حداقل دو نفر، متمم پیشامد A است،پس

$$P(A')=۱-\frac{۳۶۵\times۳۶۴\times...\times(۳۶۵-n+۱)}{۳۶۵^n}$$

احتمال‌های این‌که حداقل دو نفر در یک گروه موجود باشند که روز تولدشان یکسان باشد و نیز این‌که هیچ دو نفری روز تولد یکسان نداشته باشند در صفحهٔ بعد آورده شده است. هر کدام از این احتمال‌ها به نزدیکترین درصد گرد شده است.

احتمال وجود دو نفر با روز تولد یکسان	احتمال متفاوت بودن همهٔ روز تولدها	تعداد افراد در گروه
٪۰	٪۱۰۰	۲
٪۲	٪۹۸	۴
٪۴	٪۹۶	۶
٪۷	٪۹۳	۸
٪۱۲	٪۸۸	۱۰
٪۱۷	٪۸۳	۱۲
٪۲۲	٪۷۸	۱۴
٪۲۸	٪۷۲	۱۶
٪۳۵	٪۶۵	۱۸
٪۴۱	٪۵۹	۲۰
٪۴۸	٪۵۲	۲۲
٪۵۴	٪۴۶	۲۴
٪۶۰	٪۴۰	۲۶
٪۶۵	٪۳۵	۲۸
٪۷۱	٪۲۹	۳۰
٪۷۵	٪۲۵	۳۲
٪۸۰	٪۲۰	۳۴
٪۸۳	٪۱۷	۳۶
٪۸۶	٪۱۴	۳۸
٪۸۹	٪۱۱	۴۰
٪۹۱	٪۹	۴۲
٪۹۳	٪۷	۴۴
٪۹۵	٪۵	۴۶
٪۹۶	٪۴	۴۸
٪۹۷	٪۳	۵۰

حال اگر این جدول را روی نموداری که محور xهای آن نمایندهٔ تعداد اعضای موجود در گروه و محور yهای آن درصد احتمال‌های مزبور به ترتیب مشخصی باشد،پیاده کنیم نمودار زیر را به دست می‌آوریم.



لازم به تذکر است که با توجه به مثال ۷ بخش ۹ـ۱. وقتی $n > ۳۶۵$ است $P(A)=۰$ خواهد بود.

در مورد جدول و نمودار بالا یک تمرین در تمرین‌ها آورده شده است.

مثال ۴: از مجموعهٔ اعداد $\{۱,۲,۳,\dots,۱۰۰۰\}$ ، عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر۳ یا بر ۵ یاهر دو بخش‌پذیر باشد چقدر است؟

حل: تعداد اعداد صحیح بین ۱ و N که بر k بخش‌پذیرند از تقسیم N بر k و سپس $\left[\frac{N}{k}\right]$ به‌دست می‌آید (به مثال ۶ در قسمت ۴ـ۱ مراجعه کنید). بنابراین اگر A پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۳ و B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر ۵ باشد، آنگاه

$$P(A)=\frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}$$

$$P(B)=\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}$$

و A B پیشامد بخش‌پذیر بودن عدد انتخابی بر هر دو عدد ۳ و ۵ است. برای محاسبهٔ احتمال پیشامد A B ، چون ۳ و ۵ نسبت به هم اول هستند پس اگر عددی بر۳ و ۵ بخش‌پذیر باشد، بر ۱۵ نیز بخش‌پذیر است. برعکس، اگر عددی بر ۱۵ بخش‌پذیر باشد، همزمان بر۳ و بر ۵ نیز بخش‌پذیر است.

بنابراین $$P(A \quad B)=\frac{\left[\frac{۱۰۰۰}{۱۵}\right]}{۱۰۰۰}=\frac{۶۶}{۱۰۰۰}$$

در نتیجه بنا به قضیهٔ ۳، احتمال مطلوب برابر است با :

$$\begin{aligned} P(A \quad B) &= P(A)+P(B)-P(A \quad B) \\ &= \frac{۳۳۳}{۱۰۰۰}+\frac{۲۰۰}{۱۰۰۰}-\frac{۶۶}{۱۰۰۰} \\ &= \frac{۴۶۷}{۱۰۰۰} \end{aligned}$$

مثال ۵: با توجه به مثال ۴ و قضیهٔ ۳، برای محاسبهٔ احتمال سه پیشامد یعنی $P(A \quad B \quad C)$ فرمولی پیدا کنید.

حل: بر اساس خواص مجموعه‌ها داریم

$$A \quad B \quad C=(A \quad B) \quad C$$

و در نتیجه $$P(A \quad B \quad C)=P[(A \quad B) \quad C]$$

اگر A B را یک مجموعه فرض کنیم، آنگاه از قضیهٔ ۳ خواهیم داشت :

$$P[(A \quad B) \quad C]=P[(A \quad B)]+P(C)-P[(A \quad B) \quad C] \qquad (۱)$$

اما مجدداً از قضیهٔ ۳ به‌دست می‌آوریم

$$P[(A \quad B)]=P(A)+P(B)-P(A \quad B) \qquad (۲)$$

و طبق خاصیتِ بخش‌پذیری اشتراک نسبت بر اجتماع

$$(A \quad B) \quad C=(A \quad C) \quad (B \quad C)$$

اما طبق قضیهٔ ۳

$$\begin{aligned} P[(A \quad B) \quad C] &= P[(A \quad C) \quad (B \quad C)] \\ &= P(A \quad C)+P(B \quad C)-P[(A \quad C) \quad (B \quad C)] \end{aligned}$$

چون $$(A \quad C) \quad (B \quad C)=A \quad B \quad C$$

پس

$$P[(A \cup B) \cap C] = P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \qquad (۳)$$

از جایگذاری رابطه‌های (۲) و (۳) در رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

در این مثال و قضیهٔ ۳ می‌بینید که بعضی از احتمال‌ها جمع می‌شوند و بعضی دیگر، از مجموع احتمال‌ها، کم می‌شوند. جمع و تفریقِ احتمال‌ها **اصل شمول و عدم شمول** نامیده می‌شود. در واقع، «شمول» مربوط به احتمال‌هایی است که جمع می‌شوند و عدم شمول مربوط به احتمال‌هایی است که کم می‌شوند.

با استفاده از قضیهٔ ۳ و مثال ۵ می‌توان اصل شمول و عدم شمول را در حالت کلی (برای n پیشامد) یعنی $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$ به‌دست آورد.

برای این کار، ابتدا همهٔ اشتراک‌های ممکن پیشامدهای A_1 ، A_2 ، ...، A_n را پیدا کرده و احتمال آن‌ها را به‌دست می‌آوریم. پس از آن، احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد فردی از پیشامدها هستند را با علامت مثبت و احتمال اشتراک‌هایی که دارای تعداد زوجی از پیشامدها هستند را با علامت منفی به آن‌ها اضافه می‌کنیم که به این فرآیند، اصل شمول و عدم شمول می‌گوییم.

تمرین زیر، به پیدا کردن این الگو کمک می‌کند.

تمرین: اصل شمول و عدم شمول را برای ۴ پیشامد اثبات کنید.

مثال ۶: فرض کنید ۲۰٪ مردم یک شهر روزنامهٔ الف، ۲۵٪ روزنامهٔ ب، ۱۳٪ روزنامه پ، ۱۰٪ روزنامه‌های الف و ب، ۸٪ روزنامه‌های الف و پ، ۵٪ روزنامه‌های ب و پ و بالاخره ۴٪ هر سه روزنامه را می‌خوانند.

احتمال این‌که شخصی به تصادف از اهالی این شهر انتخاب شود که هیچ‌یک از این روزنامه‌ها را نخواند، چقدر است؟

حل: اگر E، F و G به ترتیب پیشامدهای خواندن روزنامه‌های الف، ب و پ باشد، پیشامد این که فرد انتخاب شده دست‌کم یکی از روزنامه‌های الف، ب و پ را بخواند، $E \cup F \cup G$ است. در نتیجه احتمال این‌که فرد انتخاب شده هیچ‌یک از روزنامه‌ها را نخواند، برابر $1 - P(E \cup F \cup G)$ است. پس طبق اصل شمول و عدم شمول

$$P(E \cup F \cup G) = P(E) + P(F) + P(G) - P(E \cap F)$$
$$- P(E \cap G) - P(F \cap G) + P(E \cap F \cap G)$$

=۰/۲۵+۰/۲۰+۰/۱۳−۰/۱۰

−۰/۰۸−۰/۰۵+۰/۰۴

=۰/۳۹

بنابراین، احتمال مطلوب برابر است با :

۱−۰/۳۹=۰/۶۱

تمرین



۱ ــ برای انتخاب یک نفر جهت عضویت در انجمن خانه و مدرسه یک دبیرستان، چهار نفر کاندید شده‌اند. اگر احتمال انتخاب شدن A دو برابر احتمال انتخاب شدن B باشد و B و C شانس برابر در انتخاب شدن داشته باشند، ولی احتمال انتخاب شدن C دو برابر احتمال انتخاب شدن D باشد، مطلوب است :

الف) احتمال این‌که C موفق به انتخاب شود ؛

ب) A موفق به انتخاب نشود.

۲ــ یک شرکت بازرگانی فقط به یک کارمند نیاز دارد. از بین متقاضیان خانم اکبری، خانم معینی و خانم حیدری واجد شرایط هستند. به دلیل مهارت‌های حرفه‌ایِ خانم معینی، احتمال این که ایشان استخدام شوند ۲۰٪ بیشتر از خانم اکبری و ۲۰٪ بیشتر از خانم حیدری است. احتمال این که خانم معینی استخدام شود چقدر است؟

۳ــ آمار نشان می‌دهد که در یکی از شهرهای بزرگ، ۲۵٪ جرائم در طول روز و ۲۰٪ جرائم در درون شهر صورت می‌گیرد. اگر تنها ۲۰٪ جرائم در حومهٔ شهر و در طول روز اتفاق بیفتند، در این صورت چند درصد جرم‌ها درون شهر و در طول شب رخ می‌دهند؟ چند درصد جرم‌ها در حومهٔ شهر و در طول شب اتفاق می‌افتد؟

۴ــ سه خاصیت احتمالات را برای احتمال غیرهم شانس ثابت کنید.

۵ ــ برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S ثابت کنید :

الف) $P(A \quad B') = P(A) - P(A \quad B)$

ب) $P(A' \quad B') = ۱ - P(A) - P(B) + P(A \quad B)$

۶ــ برای دو پیشامد A و B از فضای نمونه‌ای S داریم : $P(A) = P(B) = ۱$ ، نشان دهید : $P(A \quad B) = ۱$.

۷ــ فرض کنیم که شخصی از شهر اصفهان دیدن کند،احتمال این‌که از عالی‌قاپو بازدید کند۰/۷۴ ،احتمال این‌که از بازار اصفهان بازدید کند ۰/۷۰ ،احتمال این‌که از مسجد جامع بازدید کند ۰/۶۴ ،احتمال این‌که از عالی قاپو و بازار هر دو دیدن کند ۰/۴۶ ،احتمال این‌که بازار اصفهان و مسجد جامع را ببیند ۰/۴۴ و احتمال این‌که از عالی‌قاپو و مسجد جامع دیدن کند ۰/۷۲ است. احتمال این‌که به بازدید هر سه مکان برود ۰/۳۴ است. احتمال این‌که این شخص لااقل یکی از این سه مکان را دیدن کند چقدر است؟

۸ ــ نشان دهید که :

الف) $P(A) \geq P(A \quad B)$

ب) $P(A) \leq P(A \quad B)$

۹ــ با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید اگر $A_۱$ ، $A_۲$ ، ... ، A_n ، n پیشامد دو به‌دومجزا باشند، آنگاه :

$$P(A_۱ \quad A_۲ \quad \dots \quad A_n) = P(A_۱) + P(A_۲) + \dots + P(A_n)$$

۱۰ــ با استفاده از قضیه ۳ ثابت کنید که برای دو پیشامد دلخواه A و B

$$P(A \quad B) \geq P(A) + P(B) - ۱$$

۱۱ــجدول و نمودار مربوط به روز تولد را به‌یاد بیاورید و به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) نقطهٔ برخورد دو نمودار بالا و پایین چه اهمیتی دارد ؟

اگر نمودار را به راست ادامه دهیم :

ب) نمودار مربوط به وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می‌کند؟

پ) نمودار مربوط به عدم وجود دو نفر با روز تولد یکسان چه تغییری می‌کند؟

۱۲ــ عددی به تصادف از مجموعه $\{۱, ۲, ۳, \quad , ۱۰۰۰\}$ انتخاب می‌کنیم. احتمال این که :

الف) عدد انتخابی بر ۳ بخش‌پذیر باشد، امّا بر ۵ بخش‌پذیر نباشد، چقدر است؟

ب) عدد انتخابی نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش‌پذیر باشد، چقدر است؟

۱۳ـ از مجموعهٔ $\{1, 2, 3, \quad , 1000\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۴ بخش‌پذیر و بر ۵ و ۷ بخش‌پذیر نباشد چقدر است؟

۱۴ـ رابطه‌های زیر همیشه درست نیستند. برای اثبات این ادعا، برای هر حالت یک مثال نقض بزنید.

الف) $P(A \quad B) = P(A) + P(B)$

ب) $P(A \quad B) = P(A)P(B)$

۱۵ـ تعداد بیماران یک بیمارستان ۶۳ نفر است که از این افراد، ۳۷ نفر مرد و ۲۰ نفر برای عمل جراحی بستری شده‌اند. اگر ۱۲ نفر از بین بستری شدگان برای عمل جراحی مرد باشند، در این صورت چند نفر از ۶۳ بیمار نه مرد هستند و نه برای عمل جراحی بستری شده‌اند.

۱۶ـ A ، B و C سه پیشامد هستند. ثابت کنید رابطهٔ

$$P(A \quad B \quad C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

درست است **اگر و تنها اگر** رابطهٔ زیر درست باشد ؛

$$P(A \quad B) = P(A \quad C) = P(B \quad C) = 0$$

۱۷ـ ثابت کنید

$$P(A \quad B \quad C) \leq P(A) + P(B) + P(C)$$

۱۸ـ به کمک استقرای ریاضی، نامساوی تمرین ۱۷ را برای n پیشامد ثابت کنید.

منابع

۱ــ شووینگ تی ــ لین ویو ــ فنگ لین. **نظریهٔ مجموعه‌ها و کاربردهای آن**، (ترجمهٔ : حمید رسولیان). مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۸.

۲ــ ایان استیوارت ــ دیوید تال. **مبانی ریاضیات** (ترجمهٔ : محمدمهدی ابراهیمی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ ۱۳۶۵.

۳ــ مصاحب، غلامحسین. **آنالیز ریاضی**، جلد اوّل، مؤسسه انتشارات فرانکلین، تهران، ۱۳۴۸.

۴ــ ظهوری زنگنه، بیژن، گویا، مریم ؛ گویا، زهرا ؛ **دوره‌های کوتاه مدت عملی یا کارگاهی آموزش ریاضی**، اداره کل آموزش‌های ضمن خدمت، تهران، ۱۳۷۲.

۵ ــ پولیا، جورج. **چگونه مسأله را حل کنیم**. (ترجمهٔ : احمد آرام). انتشارات کیهان، تهران، چاپ دوم، ۱۳۶۹.

۶ــ چانک، کای، لای. **نظریهٔ مقدماتی احتمال و فرآیندهای تصادفی**، (ترجمه : ابوالقاسم میامئی، قاسم وحیدی)، مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵.

۷ــ فروند، جان. و. والپول، رونالد. **آمار ریاضی**، (ترجمه : علی عمیدی و محمد قاسم وحید اصل) مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۱.

۸ ــ بلایس، تی. اس. رابرتسون، ای. اف. **جبر به روش تمرین**، (ترجمه : حسین دوستی) ناشر مبتکران، تهران، ۱۳۷۰.

۹ــ لیانگ شین هان، **اعداد مختلط و هندسه**، (ترجمه : محمد بهفروزی)، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۶.

۱۰ــ جهانی پور، روح‌الله. **احتمال** (جلد دوم)، از سری کتاب‌های موضوعی انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۹.

۱۱ــ قهرمانی، سعید. **مبانی احتمال** (ترجمه : غلامحسن شاهکار و ابوالقاسم بزرگ‌نیا)، مؤسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۷۷.

۱۲ــ راس، شلدون، **مبانی احتمال**، (ترجمه : علی همدانی و احمد پارسیان)، انتشارات شیخ بهایی، ۱۳۷۵.

13- Albert D.polimeni H.Joseph. **Straight Foundations. of Discrete. Mathematics.** State University of New York-Fredonia 1990.

14- Billstein R.,Libeskind, S., Lott J., **A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers,** (2nd ed.) Benjamin-Cummings Publish.Co. 1904.

15- Churchill R .V . , Brown J .W . , Verhey R . F . , **Complex Variables and Applications,** Mc-Graw Hill 1990.

16- Feller,W. **An Introduction to Probability Theory and its Applications,** John Wiley & Sons, 1968.

17- Graham R., Knuth D., Pathshinik O., **Concrete Mathematics,** Addison-Wesley 1989.

18- Jacob.H.R.**Mathematics,a human endeavor,** W.H.Freeman, (1982 2nd ed.)

19- Larson L.C., **Problem Solving Through Problems,** Springer Verlag, 1983.

20- Ghahramani,S. **Fundamentals of probability**, Prentic-Hall, Inc,(2000 2nd ed.)

21- Grimmett G., Stirzaker D., **Probability and random processes.** Clarendon press. Oxford, 1982.

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام نگار (**Email**) **talif@talif.sch.ir** ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب های درسی ابتدایی و متوسطه نظری